Solow Modellen

Carl-Johan Dalgaard
Økonomisk Institut
Københavns Universitet

1 Et par rammeantagelser

- Lukket økonomi. Implikation 1:

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G + NX \\ &\Downarrow \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Downarrow \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

  Implikation 2:
  Husholdningernes samlede indkomst $=$
  På nationalregskabsk: BNP $=$

- Ét gode – kan enten forbruges eller investeres

- Vi ser bort fra tekniske fremskridt

- Arbejdsstyrken vokser med en konstant rate n

$$N' = (1 + n)\, N, \;\; n > -1.$$

2 Produktionen

- I praksis er produktionsprocessen indviklet: Mange forhold spiller ind (organisation, vejret osv), og der er mange input (arbejdskraft, kapital, naturressourcer osv.)

- I dette kursus antager vi, at produktionsprocessen kan simplificeres til en simpelt ligning

$$Y = z \cdot F(K, N),$$

Hvor Y = antallet af goder der produceres; K = maskiner (fysisk kapital); N = arbejdsinputtet. z = effektivitetsindeks ("Solow residualet"). $F(\cdot)$ sammenfatter hvordan K og N kombineres til at producere Y.

- Yderligere antagelser:
a) *Konstant skalaafkast*

$$xY = z \cdot F(xK, xN), \; x > 0.$$

Replikationsargumentet danner baggrunden.

- b) *Aftagende marginalafkast*: For fastholdt $N = \bar{N}$: $F'_K\left(K, \bar{N}\right) > 0; F''_{KK}\left(K, \bar{N}\right) < 0$. Tilsvarende gælder for arbejdskraft for fastholdt K. c) Kapital er et nødvendigt input: $F(0, N) = 0$

- Man kan anvende egenskaben (a) til at skrive produktionfunktionen på "intensiv form"

$$\frac{Y}{N} = zF\left(\frac{K}{N}, 1\right) \equiv zf(k), \; k \equiv \frac{K}{N}$$

Dvs:

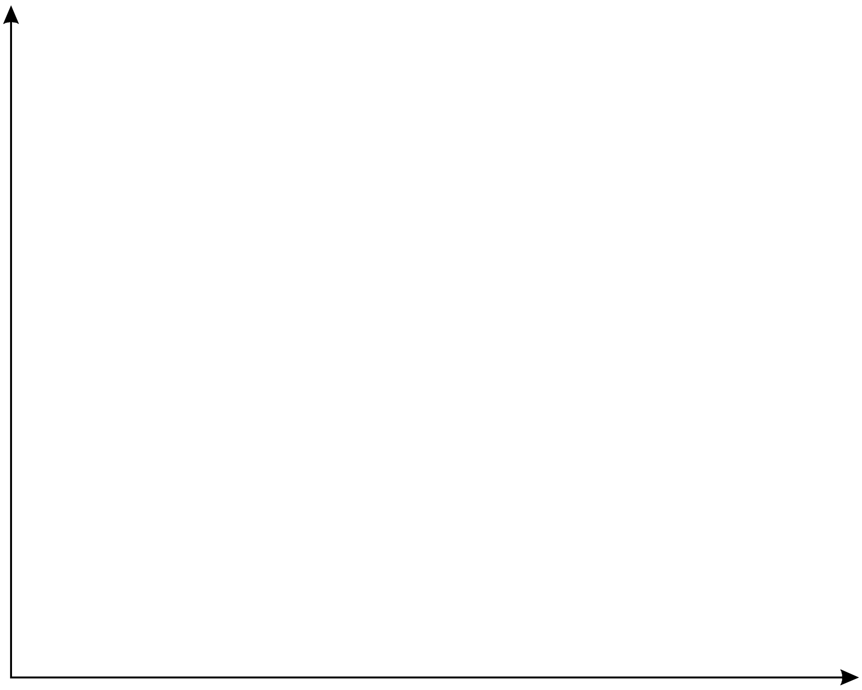
$$Y = zF(K, N) = Nzf(k)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial K} &= zF'_K(K, N) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} &= zF''_{KK}(K, N) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Vi vil også antage, at

$$\lim_{K \to 0} F'_K = \infty, \quad \lim_{K \to \infty} F'_K = 0.$$

- Illustration af $Y/N = zf\,(k)$:



- Vigtig egenskab: *Når produktionfunktionen er strengt konkav vil både marginal produktet og gennemsnitsprodutet være aftagende i faktorindsatsen* k

3 Forbrugerne

Modelleres mere enkelt. Disse sparer op, og forbruger. Vi antager at det samlede forbrug C er lig en konstant andel af deres samlede indkomst

$$C = cY, \ 0 < c \leq 1.$$

c er den *marginale forbrugskvote:*

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

Dvs at opsparingen

$$S = (1 - c)\, Y \equiv sY.$$

s er dermed den marginale (og gennemsnitlige) opsparingskvote....Dette er en meget “Traditionel” måde for makroøkonomer at modellere forbruget på (modellen er også fra 1956). Senere i pensum vil vi se på andre teorier ... hvor bl.a. real renten kommer til at betyde noget for opsparingen...

4 De sidste elementer af modellen

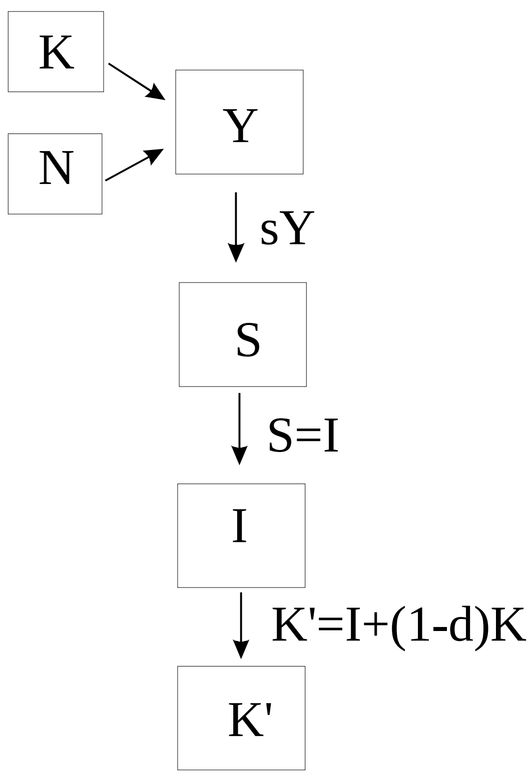
Ændringen i kapital beholdningen

$$K' = I + (1 - d)\, K,$$

d=nedslidningsraten, I=Samlede investeringer. Endelig, da økonomien er lukket:

$$S = I.$$

Overblik:



5 Løsning af Modellen

Samlet kan modellen opskrives:

$$S = sY \tag{1}$$

$$K' = I + (1 - d) K \tag{2}$$

$$N' = (1 + n) N \tag{3}$$

$$S = I \tag{4}$$

$$Y = Nzf(k). \tag{5}$$

Nu handler det om to ting:

1. Reducere modellen så meget som muligt

2. Finde modellens "ligevægt" (et hvilepunkt om man vil). I vækstmodeller er der imidlertid hele tiden noget der "vokser". Så "hvilepunktet" er hvor systemet ændre med en konstant rate – "Steady state".

Altså:

$$k' = \frac{s}{1+n} z f(k) + \frac{1-d}{1+n} k \equiv g(k)$$

Definition. Modellen steady state er et k^* der opfylder $k' = g(k)$ og hvor $k' = k$.

Funktionsanalyse

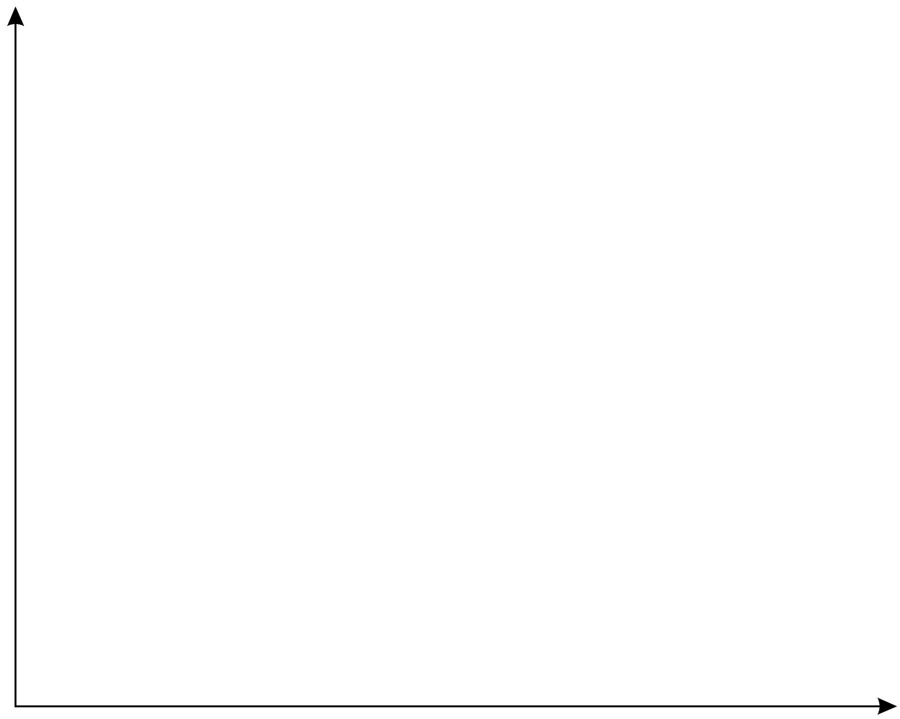
$$g(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g'(k) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g''(k) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} g'(k) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lim_{k\to\infty} g'(k) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Så er vi klar til at finde steady state grafisk



Dvs. steady state er entydig og stabil.

I steady state have altså

$$k = \ ....$$

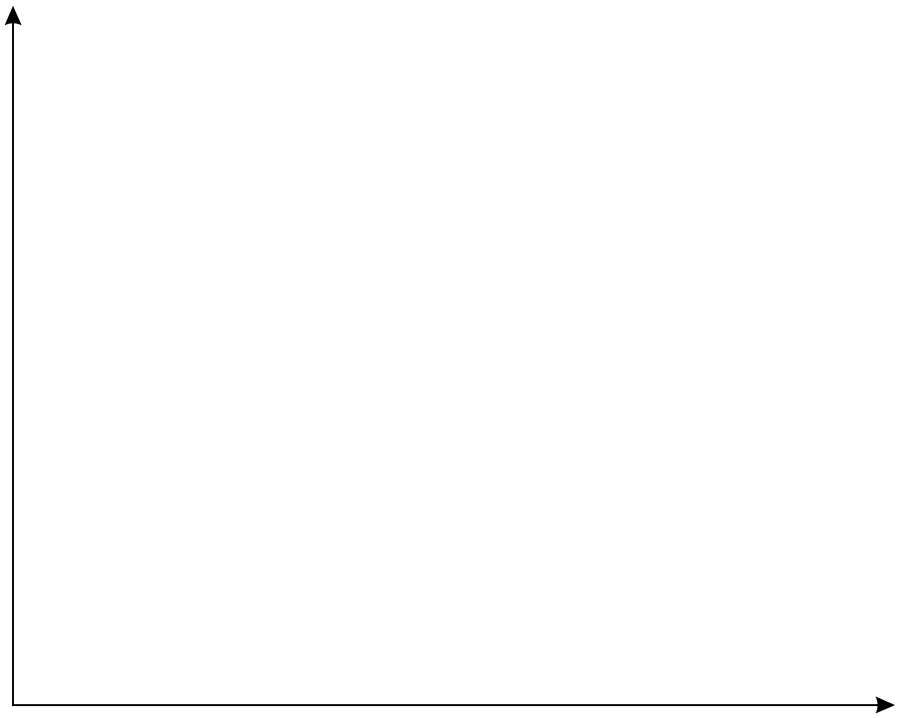
og

$$y = ... = ...$$

Vedvarende vækst i indkomst per arbejder er altså

....

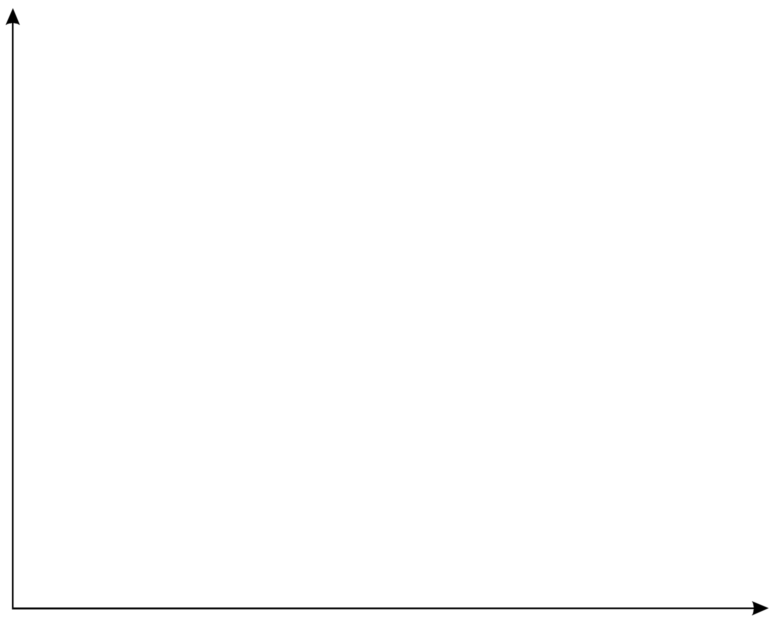
Så hvis vi skal have vedvarende vækst kræver det altså at effektiviteten gradvist forøges...dvs at "z" stiger:



Hvad øger z? – tekniske fremskridt (innovationer); Institutionelle forhold (sikring af lov og orden, privat ejendomsret) ... Nogle historikere mener at det sidste initierede "den industrielle revolution".

Ved at betragte *steady state* ($k' = k = k^*$) kan en lidt anden figur tegnes, der er ganske nyttig (Williamson, s.280).

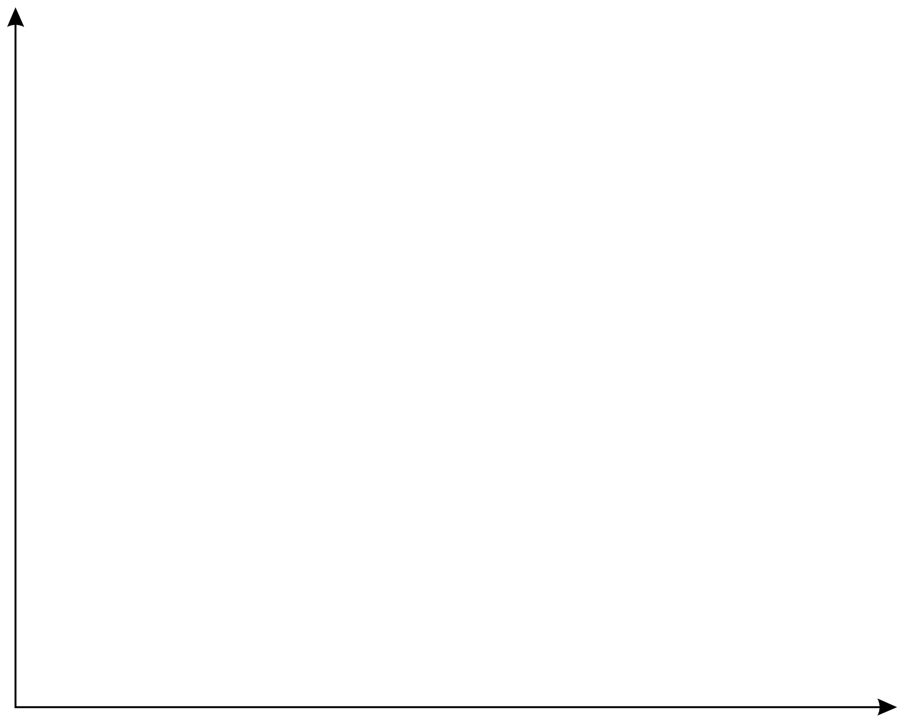
$$
\begin{aligned}
k' &= \frac{s}{1+n} zf(k) + \frac{1-d}{1+n} k \\
&\Updownarrow \; k' = k = k^* \\
\text{.............} &= \text{..........................} \\
&\Updownarrow \\
\text{.............} &= \text{..........................}
\end{aligned}
$$



6 Modellens Implikationer

6.1 Ændringer i modellens parametre

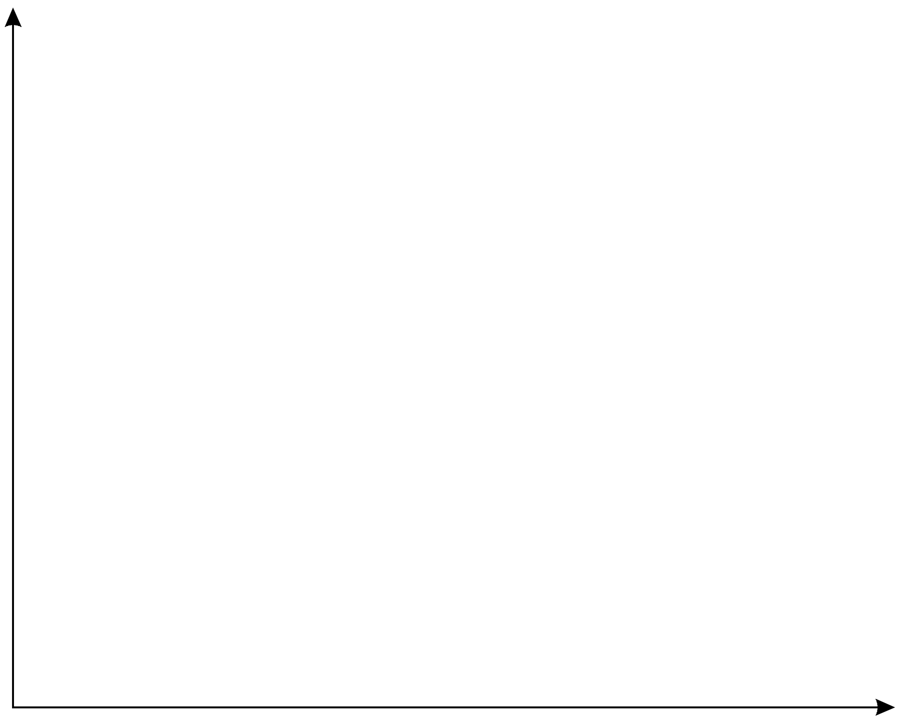
$\Rightarrow$ en PERMANENT stigning i opsparingskvoten vil .... den langsigtede indkomst per indbygger.



Hvilket er konsistent med empirien, se Williamson (s. 289)

En permanent stigning i væksten i arbejdsstyrken vil lede til .... i indkomsten per arbejder på langt sigt.

Grafisk:



Dette synes også at være konsistent med empirien (s. 290).

6.2 “The Golden Rule ”

Som vi netop har set vil en stigning i s indebærer at indkomsten per arbejder stiger på langt sigt

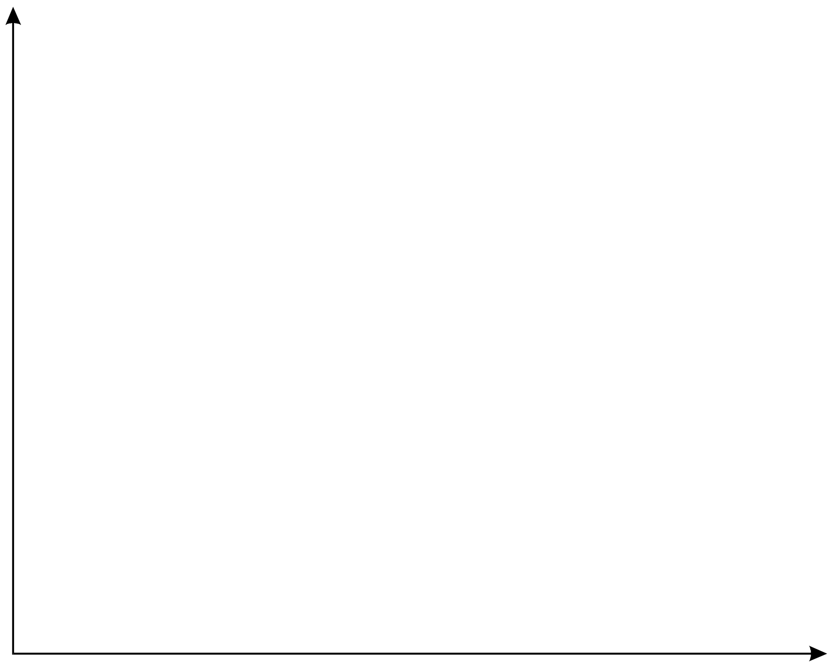
Men er mere indkomst per arbejder en målsætning i sig selv?

Betragt forbruget per arbejder, i steady state:

$$\left(\frac{C}{N}\right)^* = (1-s)\left(\frac{Y}{N}\right)^* = (1-s)\, zf\left(k^*\right),$$

hvor k^* jo øges hvis s stiger. Men der er altså modsat rettede effekter på $(C/N)^*$ af en stigning i s.

Definition: Golden rule steady state k^{gr} er dén hvor $(C/N)^*$ er maksimal
Grafiske overvejelser:



k^{gr} opfylder altså ....
Hvis $k^* > k^{gr}$ er økonomien "dynamisk ineffi-cient"

Når det handler om konvergensspørgsmålet kan det være en fordel at illustrere modellens dynamik på *alternativ* vis [end den der er forfulgt i Williamson s. 280ff].

$$
\begin{array}{ccc}
k' & = & \dfrac{s}{1+n} zf(k) + \dfrac{1-d}{1+n} k \\
& \Updownarrow & \\
\text{............} & = & \text{.........................}
\end{array}
$$

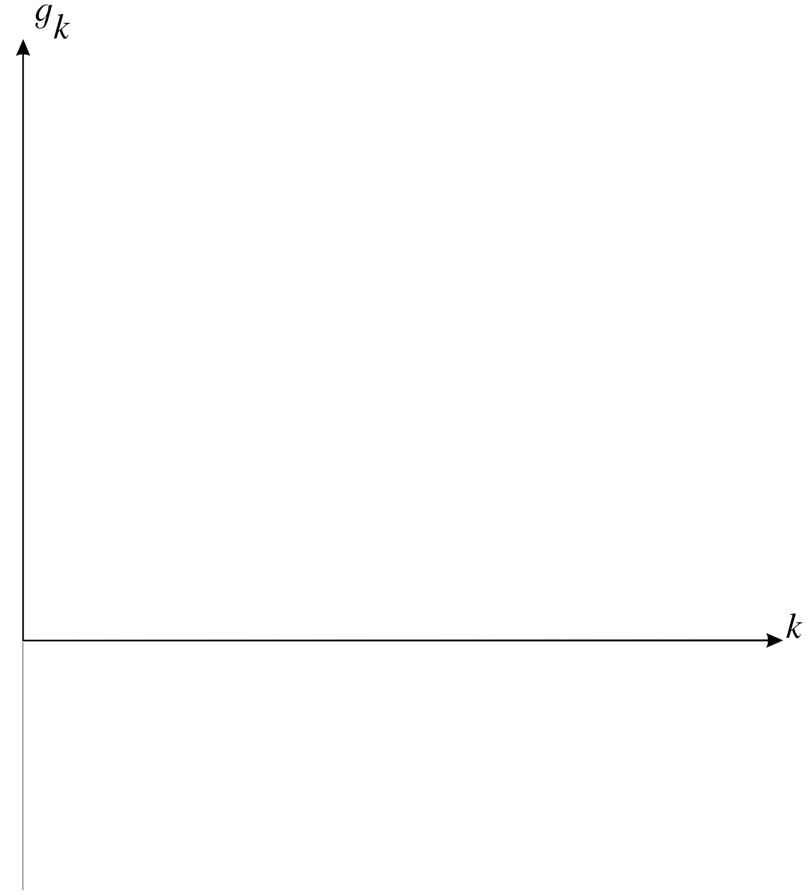
Steady state opnås altså når

$$g_k = \frac{k'}{k} - 1 = \text{............}$$

For at illustrere denne grafisk husk at

$$\frac{zf(k)}{k} = \text{................}$$

Grafisk illustration:

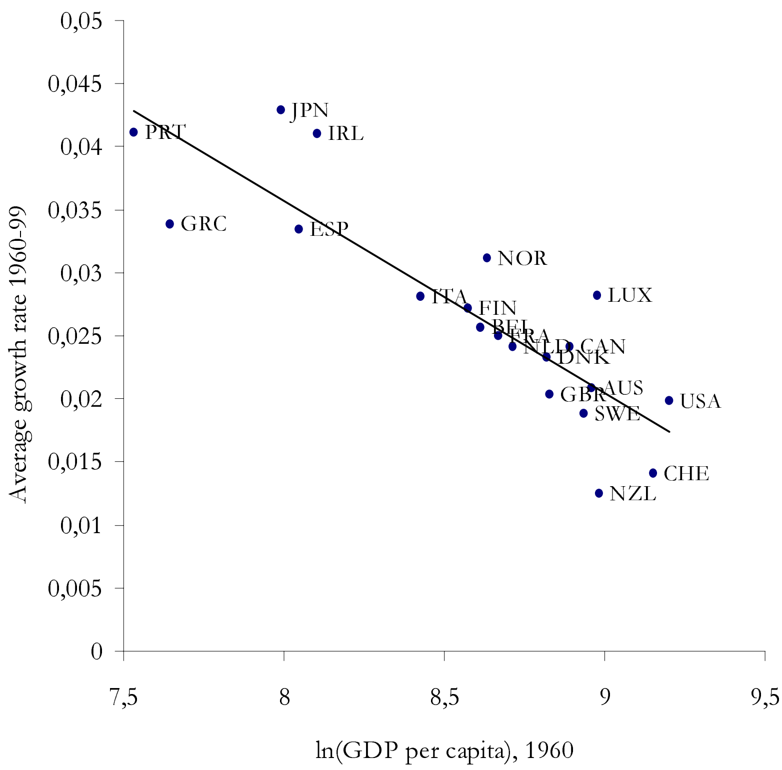


Altså: økonomiens vækstrate vil (alt andet lige) være større ....

6.3 Konvergens

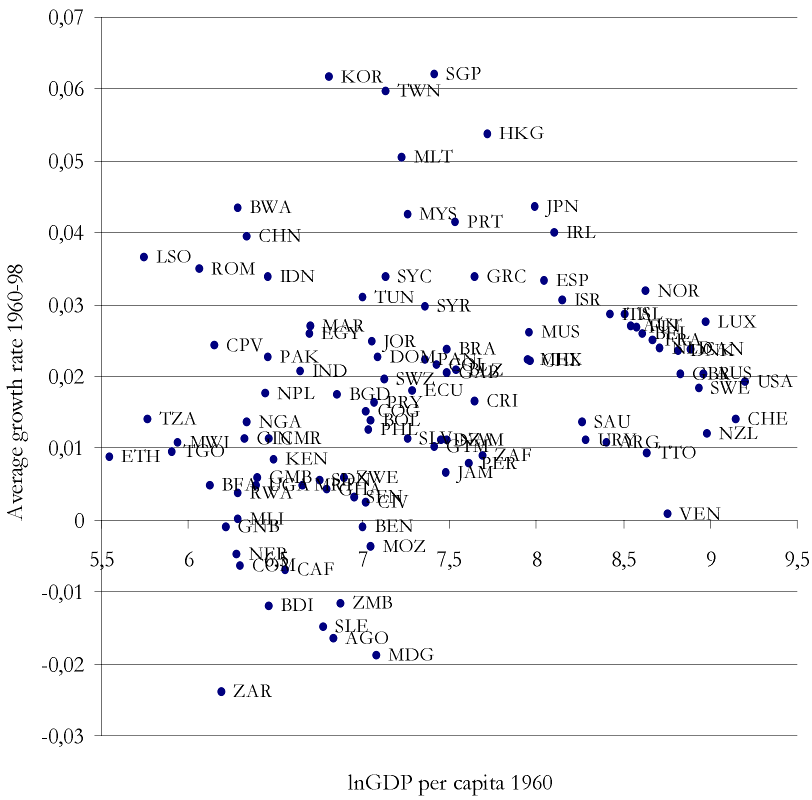
Baseret på hvad vi lige så: Solow modellen synes at forudsige, at fattigere lande bør vokse hurtigere end rigere lande. Altså at relative forskelle i indkomst per arbejder gradvist udviskes.

Dette synes konsistent med empirien:



Initial indkomst per indbygger og efterfølende vækst: 20 OECD countries.

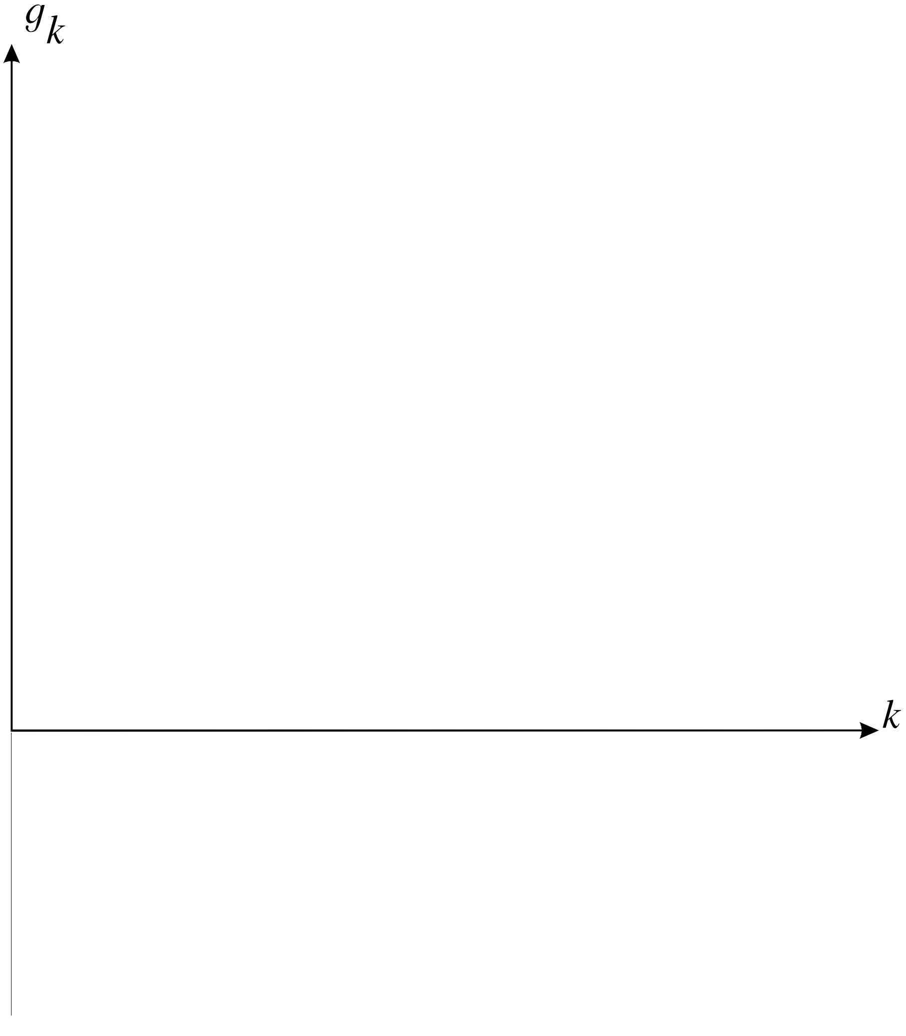
Men hvis vi løfter blikket ud over OECD bryder sammenhængen sammen ….



Konvergens?

hvorfor?

Lad os lige kikke på modellen igen ... I praksis har forskellige lande forskellige opsparingskvoter og vækstrater i arbejdsstyrken:



Ny indsigt:

Solow modellen implicerer at indkomsten per arbejder mellem forskellige lande vil konvergere hvis og kun hvis de har ens "strukturelle karakteristika", dvs ens s, δ, n,z og $f(\cdot)$

Modellen forudsiger dermed kun "betinget" konvergens.

– Forskelle i økonomisk politik (fx. mht skatter, sikring af privat ejendomsret osv.) vil slå ud i forskellige s, z og sandsynligvis også n

– at øge disse variable er altså ikke "bare lige". (nb. Williamsons udtalelse om (s. 293) at "*The Solow model is thus quite optimistic about the world distribution of income*" skal altså tages med et gran salt.)

7 Diskussion

- Den empirisk mest problematiske implikation er, at modellen ikke forklarer *vedvarende* vækst i indkomst per arbejder

- Empirisk vokser indkomsten per arbejder – og desuden er denne vækstrate forskellig fra land til land

- ... Man kan argumentere for at det vi ser empirisk er "tilpasningsdynamik"...

- ... men så ville man forvente at kunne skimte en vis nedadgående tendens i væksten per arbejder ... hvilket ikke synes at være tilfældet.

- Det vi dermed mangler er en "teori" for "z" ... men er denne "vigtig"?

7.1 Vækst regnskab (Growth Accounting)

"Growth accounting" teknikken er en metode der sigter mod at give en dekomponering af den forgangne vækst: bidrag fra K, N og z. Her er det nyttigt at anvende en eksplicit produktions funktion (Cobb-Douglas kaldes den)

$$Y_t = z_t F(K_t, N_t) = z K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha},\ 0 < \alpha < 1.$$

Opfylder alle de antagelser vi gjorde indledningsvist. t henviser til tidspunktet, fx. 1999.

Ved brug heraf kan vi tage logaritmen til produktionfunktionen

$$\begin{aligned} \ln Y_t &= \ln z_t + \alpha \ln K_t + (1-\alpha) \ln N_t \\ &\Updownarrow \end{aligned}$$

....

Eller i ændringer

....

Igen hvis væksten er eksponentiel kan vi anvende approximationen $\ln(1+x) \approx x$

....

g_z kaldes "total faktor produktivitets" (TFP) vækst [og "Solow residualet"].

Hvad skal vi så vide for at køre løs? (i) BNP, (ii) Kapitalbeholdningen, (iii) Arbejdsstyrken, og (iv) α.

α er kapitalens indkomstandel (viser I til øvelserne) – Restindkomstkvoten. $1-\alpha$ er "Lønkvoten". Kan findes i nationalregnskabet.

Resultater for USA: Nedenstående er baseret på Williamson (p.272, tabel 8.3.)*

Gennemsnitlig årlig vækst: USA

	g_Y	$\alpha \cdot g_K$	$(1-\alpha) \cdot g_N$	g_z
1950-60	2.98	1. 18	0.63	1.14
1960-70	4.25	1.31	1.15	1.74
1970-80	3.33	1. 27	1.52	0.50
1980-90	3.05	0.96	1.12	0.95
1990-99	3.50	0.90	0.90	1.67

- En ganske betydelig del af væksten kan således tilskrives TFP ("z")

- g_z kan imidlertid godt gøres "mindre", ved at inddrage effekten af øget uddannelse

- Empiriske undersøgelser viser endvidere, at forskelle i g_z redegør for hovedparten af observerede forskelle i væksten i indkomst per arbejder mellem lande

*Afrundingsfejl gør at $\alpha g_K + (1-\alpha) \cdot g_N + g_z$ ikke helt er lig g_Y. Bemærk: $\alpha = 0.36$.

8 Opsummering: Dét har vi lært

- Kapital akkumulation kan ikke sikre vedvarende vækst i indkomst per arbejder – dette kræver gentagne stigninger (vækst) i TFP ("z")

- Stigninger i opsparingskvoten leder til højere indkomst per arbejder på langt sigt (*niveau* – ikke vækst!)

- ... men det er ikke hensigtsmæssigt hvis s bliver for høj (dynamisk inefficiens)

- Højere befolkningsvækst vil sænke indkomsten per arbejder.

- Indkomst per arbejder vil kun udjævnes – i relativ forstand – hvis alle lande opnår ens strukturelle karakteristika