
Economic Policy Research Unit
Department of Economics
University of Copenhagen
Øster Farimagsgade 5, Building 26
DK-1353 Copenhagen K
DENMARK
Tel: (+45) 3532 4411
Fax: (+45) 3532 4444
Web: <http://www.econ.ku.dk/epru/>

Er der et dansk produktivitetskollaps?: duplik

Carl-Johan Dalgaard
Henrik Hansen

Er der et dansk produktivitetskollaps? – duplik

Carl-Johan Dalgaard

Økonomisk Institut, Københavns Universitet. E-mail: carl.johan.dalgaard@econ.ku.dk

Henrik Hansen

Fødevareøkonomisk Institut, Københavns Universitet. E-mail: henrik.hansen@foi.dk

Resumé. Økonomi og Erhvervsministeriet har for nylig skriftligt kommenteret på vores artikel "Er der et dansk produktivitetskollaps?" via ministeriets hjemmeside. Denne duplik indeholder vores svar på disse kommentarer.

Indledning

Nationaløkonomisk Tidsskrift har netop bragt vores artikel "Er der et dansk produktivitetskollaps?", som kort analyserer den økonomiske vækst i Danmark over perioden 1950 til 2007 (Dalgaard og Hansen, 2010a). Formålet med artiklen er at afklare, om der er tale om et markant fald i vækstraten i arbejdsproduktiviteten fra midten af 1990'erne, sådan som det er blevet gjort gældende i Økonomisk Tema nr. 8 (ØT8), fra Økonomi- og Erhvervsministeriet (ØEM).

Problemstillingen er interessant af flere årsager. For det første er der uenighed om dateringen af det eventuelle fald i vækstraten i arbejdsproduktiviteten. Hvor Økonomi- og Erhvervsministeriet i deres rapport daterer skiftet i vækstraterne til 1995, mener CEPOS at faldet indtraf i 1998 mens Arbejderbevægelsens Erhvervsråd henlægger skiftet til først at forekomme i 2001. På baggrund af disse tre udspil, som nok ikke alle er uafhængige af ophavernes politiske ståsted, er det naturligt at se på vækstraten i arbejdsproduktiviteten over en længere periode. Og det er efter vores mening oplagt, at man bør benytte anerkendte statistiske metoder for at skille politik fra videnskab, når et eventuelt brud skal dateres. De statistiske analyser vi benytter i vores artikel er helt gængse tidsrækkeanalyser, som de fleste studerende undervises i på første del på økonomistudierne i København,

Odense og Århus. Vores artikel er, i den forstand, altså ikke et videnskabeligt kunststykke, men blot et eksempel på anvendelsen af vores håndværk.

En anden grund, til at problemstillingen er interessant, er at regeringens vækstforum arbejder ud fra den grundpræmis, at vi har haft et trendfald i vækstraten i arbejdsproduktiviteten, og at vi derfor i produktivitetsmæssig forstand klarer os markant dårligere end de lande "vi normalt sammenligner os med". Denne præmis bør vel diskuteres, hvis forumets medlemmer skal have en chance for at give relevant råd og vejledning til regeringen.

Økonomi- og Erhvervsministeriet har valgt at kommentere vores artikel, og at lægge denne kommentar på ministeriets hjemmeside.¹ Vi er naturligvis glade for, at vores artikel anses for at være tilstrækkelig vigtig til, at ministeriet bruger tid på kommentere den offentligt. Samtidigt må vi erkende, at nogen af kommentarerne kræver et svar. Derfor denne duplik.

Hvad vi skrev

Motivationen for vores artikel er som nævnt, at Økonomisk Tema nr. 8, som vi læser det, hævder at den gennemsnitlige vækstrate i arbejdsproduktiviteten – produktivitetstrenden om man vil – er faldet markant siden midten af 1990'erne. Vores bekymring er, at denne konklusion synes at være fremkommet ud fra visuel inspektion af "filtrerede" data serier – fx som den der gives i Figur 1 i ØEMs kommentar. Filtrererede serier er, som bekendt, blot estimerede værdier fra en model. I dette tilfælde en ikke-parametrisk estimator kendt som HP-filtret. Da der er tale om estimerede værdier skal man være varsom med at benytte disse tal til håndfaste konklusioner idet tallene er behæftet med en statistisk usikkerhed, der er særlig stor i starten og slutningen af perioden, hvor den ikke-parametriske estimator har ganske ringe egenskaber (såkaldte endepunktsproblemer)—dvs., tallene kan være "temmelig forkerte".

¹ Man kan downloade kommentaren her: <http://www.oem.dk/sw29615.asp>. Selvom kommentaren retter sig mod en artikel med titlen "Er der et dansk produktivitetsparadoks?", fremgår det af sammenhængen at det er vores papir "Er der et dansk produktivitetskollaps?" der kommenteres på.

Vi valgte derfor at bruge *formelle* statistiske metoder, der nu engang er udviklet til at svare på spørgsmål som dette: Er vækstraten i arbejdsproduktiviteten konstant (i 1990'erne)? I hovedpointer er vores konklusioner:

- **BNP per indbygger og BNP per beskæftiget udviser konstant vækst.** Altså: Ingen trendbrud over perioden 1950-2007
- **For BNP per arbejdstime kan det afvises, at der er tale om en konstant vækst. Men faldet i den gennemsnitlige vækstrate i dette produktivitetsmål starter i 1970'erne; ikke i 1990erne eller senere.**
- **Det sidste fund er påhæftet et vigtigt usikkerhedsmoment:** Data for antallet af arbejdstimer er dårligt opgjort, og kilderne til data fra Danmarks Statistik skifter henover perioden 1970-2007. Det kan meget vel være, at et tilsyneladende "produktivitetsfald" derfor i virkeligheden er dataproblemer. Denne uro bliver ikke mindre af, at vækstraten i BNP per beskæftiget – et produktivitetsmål der er betydeligt mindre usikkert opgjort - er særdeles stabil over hele perioden.

Endelig, i forhold til komparativ udvikling:

- **Over perioden 1950-2007 har den danske vækst ikke været usædvanlig lav i et komparativt OECD perspektiv**

Kommentarerne fra Økonomi- og Erhvervsministeriet

Som forskere er vi af og til så heldige, at vores forskningsresultater får bevågenhed i offentligheden; det være sig i pressen og/eller de offentlige myndigheder. I nogle tilfælde oplever vi, at holdningen til vores arbejde gennemløber tre faser. Fase 1 er, at det fra anden side bliver gjort gældende, at forskningsresultaterne er *forkerte*. Fase 2 er, at det erkendes, at mens resultaterne måske ikke er decideret forkerte, da er de lidt *ligegyldige*. Fase 3 består i, at kritikkerne erkender at resultaterne måske ikke er forkerte eller ligegyldige; de er blot udtryk for, hvad "man altid har sagt".

Det unikke ved Økonomi- og Erhvervsministeriets offentlige kommentar til vores artikel er, at ministeriet synes at befinde sig *simultant* i alle tre faser. I det følgende adresserer vi den fremførte kritik; fra "fase 1 – 3".

1. Resultaterne er forkerte

Der er flere steder i kommentaren, hvor det antydes, at vores artikel var og/eller er fejlbehæftet. Fx:

Side 1: *"Artiklen er en substantielt revideret udgave af et tidligere EPRU arbejdspapir fra februar 2010. Revisionerne skal blandt andet ses i lyset af, at arbejdspapiret blev kritiseret i fagøkonomiske kredse (ØEM, FM, AE, DØRS) bl.a. på grund af datamæssige problemer"*

og videre at:

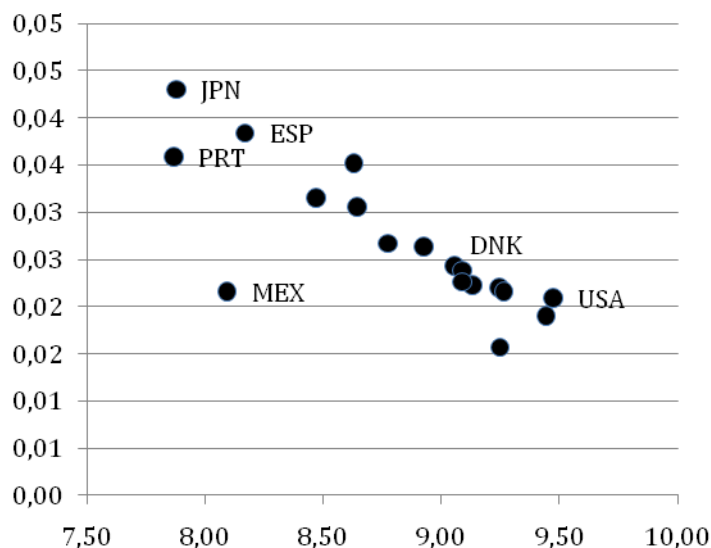
Side 1-2: *"DH har i den publicerede artikel i Nationaløkonomisk Tidsskrift taget højde for dele af kritikken og foretager analyserne på baggrund af en ny tidsserie for timeproduktiviteten og supplerer også analysen med DST-tal som datagrundlag."*

Bemærk at hvor den første kommentar påpeger der *har været* noget galt med artiklen ("datamæssige problemer"; "blandt andet"), antyder den anden bemærkning at der *stadig er* problemer, idet vi åbenbart kun har taget højde for "dele af kritikken".

Det er helt rigtigt, at vi – til vores store glæde - blev kontaktet fra flere sider omkring vores analyse, da den udkom som EPRU-analyse tidligere på året (Dalgaard og Hansen 2010b). Kritikken af analysen var ret enslydende. Bekymringen gik på, at vi anvendte en international database for BNP (Penn World Tables), frem for data fra Danmarks Statistisk. Desuden påviste Arbejderbevægelsens Erhvervsråd at de data vi anvendte for vækstraten i BNP per arbejdstime, i vores første udkast, var fejlbehæftet; en vigtig kommentar vi naturligvis tog hånd om.

For at udgå forvirring om hvorvidt vores resultaters holdbarhed skulle tilskrives valget af database, valgte vi i den endelige udgave af artiklen at inddrage mere data; specifikt data fra Danmarks Statistik. Vores resultater er naturligvis ikke dataspecifikke. Data fra Penn World Tables og fra Danmarks Statistik giver kvalitativt det samme. Dvs. de resultater vi har listet ovenfor.

Vi vil gerne understrege, at der på intet tidspunkt er fremført anden kritik af nogen art – for eksempel af metodisk karakter - fra nogen af de i kommentaren fremhævede ministerier og



Figur 8. Konvergens i OECD: 1950-2007.

Figuren viser sammenhængen mellem den gennemsnitlige vækstrate 1950-2007 vs. (log) BNP per indbygger i 1950. **Anm:** 1) Her følger vi Økonomi- og Erhvervsministeriet og udelader Polen, Ungarn, Tjekkiet og Luxembourg samt Norge siden landets BNP per indbygger er følsomt overfor udsving i olieprisen. Desuden mangler der data for Tyskland, Grækenland og Korea i 1950. **Datakilde:** Penn World Table Version 6.3 og egne beregninger.

organisationer. I særdeleshed er der ikke blevet fremført kritik fra "danske fagøkonomiske kredse" som vi har valgt at ignorere; sådan som man måske kunne forledes til at tro, hvis man læser ØEMs kommentar. Vi er derfor overbeviste om, at vi har adresseret al substantiel kritik.

I forhold til analysen af den komparative udvikling hedder det i kommentaren fra ØEM:

Side 2-3: "DH konkluderer desuden, at den danske produktivitetsvækst over perioden 1950-2007 ikke har været usædvanligt lav i et komparativt OECD perspektiv. Denne del af analysen er ikke baseret på formelle statistiske tests, men ud fra et argument om, at fattige lande udviser en tendens til catch-up i forhold til initialt rigere lande. DH illustrerer dette i en figur (figur 8), der viser sammenhængen mellem den gennemsnitlige vækstrate 1950-2007 og BNP pr. indbygger i 1950. Figuren viser imidlertid kun absolut konvergens for udvalgte af lande, og havde DH medtaget flere lande i figuren, ville der ikke være tegn på konvergens. Der er således ikke kontrolleret for en række strukturelle karakteristika. Det er en velkendt kritik, at der kan være et selektionsproblem, når man kun ser på udvalgte lande, jf. fx Peter Birch Sørensen og Hans Jørgen Whitta-Jacobsens *Introducing Advanced Macroeconomics*, side 45."

Omtalte figur fra vores artikel er gengivet ovenfor.

I ØEMs kommentar gøres det altså gældende, at vi ikke har forstået centrale elementer af den såkaldte "konvergensdebat", der udspillede sig i akademiske kredse i 1980'erne og i første halvdel af 1990'erne. Henvisningen til Peter Birch Sørensen og Hans Jørgen Whitta - Jacobsens lærebog er glimrende, men for de ikke-studerende læsere vil det være mere passende at henvise til en artikel i *Nationaløkonomisk Tidsskrift* "Global indkomstulighed i et vækstteoretisk perspektiv: En Introduktion til Konvergensdebatten" skrevet af Carl-Johan Dalgaard og Claus Thustrup Kreiner i 1999.

I kommentaren er der en lille misforståelse idet vores figur 8 antages at illustrere "absolut konvergens". I realiteten afspejler den "betinget konvergens".

Et af de vigtigere fund i vækstofforskningen er, at grupper af lande *der er forholdsvis ens i relation til centrale økonomiske størrelse* (fx investeringsrater og befolkningsvækst) er karakteriseret ved et ganske særligt vækstmønster: initialt fattigere lande vokser hurtigere end initialt rigere lande. Dette kaldes "betinget konvergens". OECD landene er – i et globalt perspektiv - ret ens i forhold til faktorer så som investeringsrater mv. Landene er i al fald tilstrækkeligt ens til at kunne være del af den samme "klub". Derfor er det heller ikke overraskende at man, konsistent med betinget konvergens, genfinder en klar sammenhæng mellem initial BNP per indbygger i 1950 og efterfølgende gennemsnitlige årlige vækstrate.

Som det fremgår af figuren ligger Danmark nogenlunde som Danmark "skal". Vi er systematisk vokset hurtigere end de lande der var *rigere* end os; men samtidigt langsommere end (strukturelt sammenlignelige) lande der var *fattigere* end os i 1950.

Den vigtige pointe i forhold til at evaluere den danske vækst er, at man ikke kan vente, at Danmark vokser hurtigere – eller lige så hurtigt – som *alle* OECD landene. Det forventes, at vi vokser langsommere end de der er fattigere end os, og dermed, da Danmark i 1950 havde indkomst over gennemsnittet, at gennemsnitsindkomsten i OECD vokser hurtigere

end Danmarks BNP per indbygger. Denne simple pointe, er også at finde i vores kollegaers glimrende lærebog; men ikke i ØT8.

Omvendt skal Danmark så også helst vokse hurtigere end de lande der er rigere end os. Og i ØT8 illustreres det, at Danmark faktisk er blevet *fattigere* i forhold til de *rigeste* lande i OECD klubben (top 5); jf. Figur 3 i kommentaren.

Det er et noget overraskende fund, i lyset af vores figur 8 (jf ovenfor). Tydeligvis er Danmark vokset *hurtigere* end top 5 i 1950. Så hvordan skal man forstå denne forskel?

En mulighed er, at ØEM og vi bruger forskellige tidshorisonter. Hvor vi starter i 1950, vælger ØEM at bruge en temmelig meget kortere tidshorizont. Vi mener, som forskere, at man bør "binde sine hænder" så meget som muligt i økonomiske analyser. For eksempel ved slet og ret at anvende *alle* de data man kan få fat på, og dermed undgå at analysens resultater kan henføres til data-mining. Som det fremgår af figuren ovenfor, kan man nå 60 år tilbage i tiden, og denne tidshorizont viser at Danmarks langsigtede vækst har været som man skulle forvente i en international sammenligning.

En anden forklaring er, at ØEM opgør forholdet mellem Danmarks BNP per indbygger og den *løbende* top 5. Der er ingen der kender den relevante tidshorizont for indkomstkongvergens når man sammenligner supremum (løbende top 5) for en gruppe tidsrækker med enten et enkelt lands udvikling, eller med gennemsnittet for den sags skyld. *Man kan derfor ikke bruge ØEMs figur i en kongvergensdiskussion.*²

Den sidste "fase 1" indvending i kommentaren er:

Side 2: *DH fremfører, at ØEM og andre er nået frem til, at væksten er "kollapset" omkring 1995, men at "det er vanskeligt at slutte, at vi har oplevet et signifikant fald i den gennemsnitlige vækstrate i BNP pr. på et eller andet tidspunkt efter 1995". Dette er en forkert udlægning af analyserne i ØT. Heri beskrives udviklingen som, at den trendmæssige vækst i produktivite-*

² Denne pointe uddybes i Appendix nedenfor.

ten har været faldende siden midten af 1990'erne. Der er altså ikke tale om et ekstraordinært fald på et givet tidspunkt, men en gradvis udvikling

I artiklen starter vi med at skrive, at ØT8 hævder at *"den trendmæssige vækst i produktiviteten har været faldende siden midten af 1990'erne"*.³ Hvis ØEM derfor mener hvad de skriver deres kommentar til vores artikel, er det svært at se hvordan dette er en forkert udlægning af ØT8. Og vores statistiske analyse har netop som eksplicit præmis at der nok ikke er sket et pludseligt fald, men derimod muligvis en "snigende ændring" i den gennemsnitlige årlige vækstrate i arbejdsproduktiviteten. Vi tester specifikt for denne mulighed, og det er en af pointerne i artiklen.

2. Resultaterne er ligegyldige

I forlængelse af ovenstående citerede afsnit kan man videre læse, at

Side 2: *"Af samme grund skal det understreges, at det i den sammenhæng er underordnet, hvilket år i 1990'erne der sættes som skilleår."*

Vi er enige: Hvis der havde været tale om et fald i 1990'erne, er det måske *i praksis* ligegyldigt hvilket konkret år man vælger (om end det gør en akademisk forskel).

Men hovedpointen i vores artikel er, at man *ikke bør fokusere på 1990'erne*, når det gælder produktivitetsskiftet. Hvis der er tale om et fald i væksten, så vil den korrekte konklusion være, at *"den trendmæssige vækst i produktiviteten har været faldende siden midten af 1970'erne"*, snarere end *"siden midten af 1990'erne"*. Vi mener, der er en substantiel forskel på de to udsagn, og at denne forskel er af væsentlig betydning for en forståelse af den danske vækstproces og dermed for eventuelle politikovervejelser.

3. "Det har vi altid sagt"

Vi slutter denne anoterede gennemgang af Økonomi- og Erhvervsministeriets kommentar med en interessant version af "det har vi altid sagt".

³ Den endelige version af vores artikel til *Nationaløkonomisk Tidsskrift* findes her: http://www.econ.ku.dk/dalgaard/Work/Det%20danske%20v%C3%A6kstskollaps_REVIDERET.pdf . Jf 2. afsnit på s. 1 i artiklen.

Side 2: *DH ser på udviklingen i produktivitsudviklingen fra 1950'erne og 1960'erne og frem til i dag (2007) primært på baggrund af data fra Penn World Table. Analyserne viser ifølge DH:*

- *"For timeproduktiviteten kan man, hjulpet af den verserende debat, visuelt spore en faldende tendens fra 1970'erne til i dag."*
- *"For vækstraterne i BNP pr. arbejdstime kan man spore en signifikant parameterustabilitet, som muligvis kan henføres til et systematisk fald i gennemsnitlige vækstrate over tid."*
- *Når DH bruger DST-tal, må de konkludere, at der er "meget klare tegn på parameterustabilitet i BNP pr. arbejdstime."*

Disse udsagn må udlægges som, at DH er enige i, at væksten i produktivitet er faldet over tid. Resultaterne er dermed ikke i modstrid med konklusionen i ØT fra november 2009 om, at Danmark siden midten af 1990'erne har haft en svag udvikling i produktiviteten i forhold til tidligere (og i forhold til andre lande).

Citaterne fra vores artikel er løjerligt udvalgt, idet de udgør dele af de diskuterende kommentarer undervejs i vores analyse. "Mellemregninger", om man vil, som vi oftest afviser eller diskuterer i efterfølgende sætning eller afsnit. Økonomi- og Erhvervsministeriet burde naturligvis have citeret vores *konklusioner*, som endda er opregnet i punktform i artiklen (og igen ovenfor). Men i fald ovenstående skal fortolkes derhen, at ØEM nu er enige i de fakta vores artikel dokumenterer, da er det jo blot fint. Det handler jo ikke om at få ret, men om at blive klogere.

Appendix: Betyder "betinget konvergens" også "konvergens mod top-pen"?

Økonomisk Tema 8 fra Økonomi- og Erhvervsministeriet (ØEM) beskriver den danske produktivitetsudvikling. Rapporten analyserer både den danske produktivitet over tid og i et komparativt internationalt perspektiv. Rapporten indledes med følgende udsagn og figur (Økonomisk Tema, Nr. 8, side 9):

"Danmark er stadig et af verdens mest velstående lande. Men siden midten af 1990'erne er afstanden til de rigeste OECD-lande vokset, mens OECD landene i gennemsnit er halet ind på Danmarks "velstands-forspring", jf. figur 1.

Figuren (gengivet nedenfor) viser ganske klart, at Danmarks BNP per indbygger har nærmet sig OECD-gennemsnittet, og samtidig at vi i Danmark ikke har kunnet følge med top-5 (gennemsnit) siden år 2000. Denne figur er en af hjørnestene i ØEMs argument for, at Danmark har haft et produktivitetsvækstproblem fra midten af 1990'erne og frem.⁴

At Danmarks velstandsniveau har nærmet sig OECD's gennemsnit er teoretisk let forståeligt, idet vi i 1970 var rigere end gennemsnittet, hvorfor det er forventeligt, at OECD-gennemsnittet stiger hurtigere end det Danske velstandsniveau. Dette er kendt som (betinget) konvergens i den akademiske vækstlitteratur. Se fx Dalgaard og Kreiner (1999).

Men sammenligningen mellem Danmark og de rigeste OECD-lande (et gennemsnit af top-5) viser vel, at Danmark burde have gjort det bedre, i hvert fald siden årtusindeskiftet. Det mener ØEM i al fald. For i kommentaren til vores artikel får læseren at vide, at:

Side 3. *ØEM's analyse viser, at siden midten af 1990'erne er afstanden til de rigeste OECD-lande vokset, mens OECD-landene i gennemsnit er halet ind på Danmarks "velstands-forspring". Den sidste del kan uden tvivl forklares af betinget konvergens, men det gælder ikke den første del. Det afspejler, at Danmark ikke har fulgt med lande, der har klaret sig bedre produktivt mæssigt...*

Men er dét nu også rigtigt? Svaret viser sig at være: Nej.

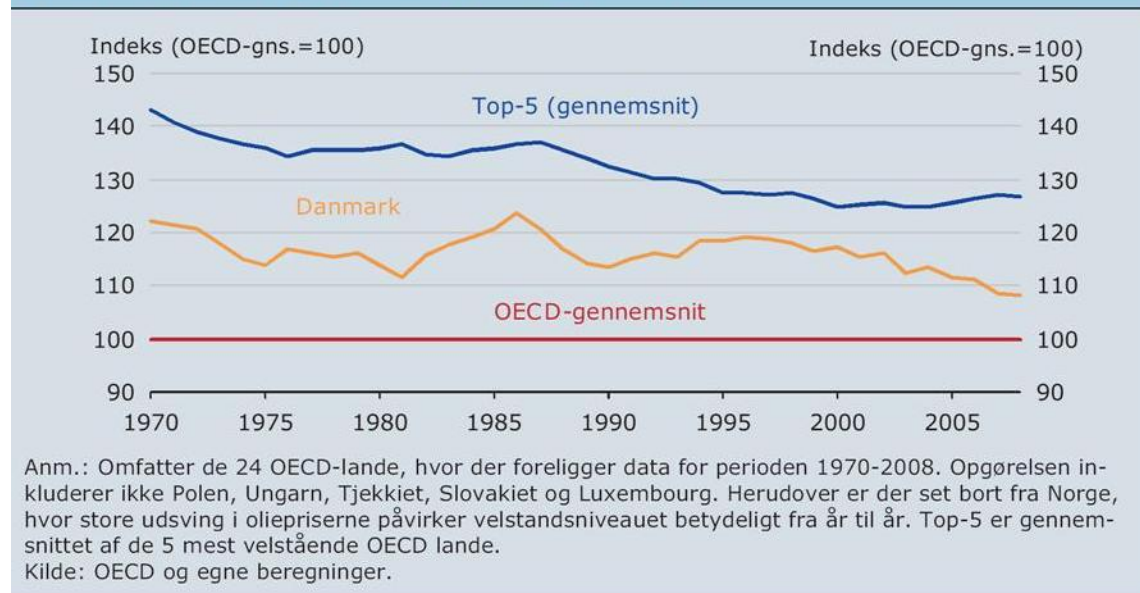
I udgangspunktet er problemet med denne sammenligning ØEM foretager, at vi ikke ved, hvilken udvikling vi skal forvente at se over tid. Nedenfor giver vi derfor et teoretisk bud

⁴ Denne opfattelse bestyrkes selvsagt af kommentaren til vores artikel. På side 2 lyder det eksplicit: "Når 1995 er valgt som skilleår i Økonomisk Tema, hænger det sammen med, at det er fra dette tidspunkt, at velstandsafstanden til de rigeste OECD-lande startede med at vokse mens velstandsafstanden til OECD-gennemsnittet begyndte at falde."

Figur 1

Danmarks velstand pr. indbygger i forhold til gennemsnittet i OECD

Siden midten af 1990'erne er afstanden i velstand til de mest velstående lande i OECD vokset, mens afstanden til gennemsnittet for OECD er mindsket. Det betyder også, at Danmarks placering på velstandsranklisten er faldende.



på, *hvad* man skal forvente under en antagelse om at de 24 OECD lande er rimeligt tæt på deres strukturelle langsigtsniveau i perioden 1970-2006. Vores model viser at valget af "løbende" top-5 lande som sammenligningsgrundlag betyder, at man skal forvente *en strengt positiv forskel mellem Danmarks velstandsniveau og top-5 niveauet*. Man kan dermed *ikke*, ud fra figuren, slutte at Danmarks udvikling har været ringere end forventet.

A2. En simpel tidsrækkemodel for indkomsten i OECD-landene

Lad $y_{i,t}$ betegne logaritmen til BNP per indbygger i OECD-land i . Vi antager, i tråd med den akademiske vækstlitteratur, at niveauet for BNP per indbygger blandt OECD-landene konvergerer, og dette indarbejdes eksplicit i modellen for $y_{i,t}$. Vi benytter en tidsrækkeorienteret definition af konvergens fra Bernard og Durlauf (1996) :

Definition: *BNP per indbygger i to lande i og j konvergerer hvis lang-sigts-forudsigelsen (forventningen) på et givet tidspunkt, t , for (log) BNP per indbygger i de to lande er ens:*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E(y_{i,t+h} - y_{j,t+h} | \mathfrak{T}_t) = 0 \quad (1)$$

Det følger af denne definition at to lande ikke konvergerer, hvis forskellen mellem indkomstniveauerne er konstant—forskellig fra nul— eller hvis forskellen er en ikke-stationær proces.

En simpel tidsrækkemodel, som opfylder betingelsen for konvergens er følgende:

$$y_{i,t} = s_t + x_{i,t}, \quad (2)$$

hvor s_t er en fælles trend, som kan være både stokastisk og deterministisk, mens $x_{i,t}$ er en anden-ordens stationær proces med middelværdi 0 og varians σ^2 . (Vi antager altså at konjunkturbevægelserne har ens varians i alle lande, dette er ikke en nødvendig betingelse, men den letter fremstillingen i det følgende betydeligt). Hvis BNP per indbygger i alle OECD-landene kan beskrives af den simple proces, konvergerer de ifølge definitionen ovenfor, da

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E(y_{i,t+h} - y_{j,t+h} | \mathfrak{F}_t) = \lim_{h \rightarrow \infty} E(x_{i,t+h} | \mathfrak{F}_t) - \lim_{h \rightarrow \infty} E(x_{j,t+h} | \mathfrak{F}_t) = 0 - 0 = 0. \quad (3)$$

A3. En model for top-5

Med modellen for hvert land på plads kan vi vende os mod top-5, dvs. udviklingen i den gennemsnitlige indkomst for de til enhver tid 5 rigeste lande. De rigeste lande findes meget enkelt ved, at vi sorterer landene efter indkomstniveau på ethvert tidspunkt. For n (fx 24) lande kan vi skrive den ordnede liste som $(y_{1:n,t}, y_{2:n,t}, \dots, y_{n-1:n,t}, y_{n:n,t})$, og gennemsnitsvelstandsniveauet for de 5 rigeste lande er

$$\hat{y}_t = \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n y_{i:n,t} = s_t + \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n x_{i:n,t} \quad (4)$$

Hvis Danmarks velstandsniveau benævnes $y_{D,t}$ skal vi nu se på differencen givet ved

$$y_{D,t} - \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n y_{i:n,t} = x_{D,t} - \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n x_{i:n,t} = \sigma(x_{D,t} / \sigma - \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n (x_{i:n,t} / \sigma)). \quad (5)$$

Langsigts-forventningen til Danmarks udvikling er naturligvis uændret, $\lim_{h \rightarrow \infty} E(x_{D,t} | \mathfrak{F}_t) = 0$, og vi kan derfor fokusere på forventningen til top-5

$$\lim_{h \rightarrow \infty} E(D_t(5, n) | \mathfrak{F}_t) = \sigma \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n \lim_{h \rightarrow \infty} E[(x_{i:n,t} / \sigma) | \mathfrak{F}_t], \quad (6)$$

Denne forventning, som ofte benævnes udvalgs-differentialet, kan ikke evalueres for vilkårlige fordelinger af $x_{i,t}$, men man kan give en øvre grænse for forventningen, og givet specifikke fordelingsantagelser kan man finde eksplicitte udtryk. (Se fx David og Nagaraja, 2003)

A4. Den forventede udvikling

Vi kan antage, at de landespecifikke elementer $x_{i,t}$ er parvist uafhængige, stationære, ergo-diske Gaussiske processer. I dette tilfælde kan vi give et eksplicit udtryk for forventningen i (6) idet forventningen til de ordnede variable er beregnet og tabuleret for normalfordelte variable i flere tabelværker. Specifikt kan vi beregne den forventede værdi for gennemsnittet af de 5 rigeste lande blandt de 24 OECD-lande i figuren. Opslag i fx Fisher og Yates (1963, Tabel 20) giver

$$\sigma \frac{1}{5} \sum_{i=n-4}^n \lim_{h \rightarrow \infty} E[(x_{i:24,t} / \sigma) | \mathfrak{T}_t] = \sigma \frac{1}{5} (0,88 + 1,04 + 1,24 + 1,50 + 1,95) = 1,322\sigma \quad (7)$$

Dette viser, at vi på langt sigt skal forvente, at den løbende top-5 ligger godt 1,3 gange spredningen i $x_{i,t}$ over gennemsnittet, mens vi samtidig skal forvente, at Danmark ligger på gennemsnittet.

Samlet kan vi altså ikke—ud fra figur 1 i Økonomisk Tema 8—sige, hvorvidt Danmark har haft en markant ringe udvikling i de senere år. Velstandsniveauet for hvert enkelt land skal konvergere mod gennemsnittet, men indkomsten for de til enhver tid fem bedste skal konvergere mod et niveau klart over gennemsnittet.

Konklusion: *Selvom* vi forventer på tværs af en gruppe lande med ens strukturelle karakteristika, at fattigere lande vokser hurtigere end rigere lande (konsistent med betinget konvergens), så følger det *ikke*, at det *løbende* forhold mellem indkomsten i en sub-population af ”rige lande” og et udvalgt ”fattigere land” indsnævres over tid. Figur 1 ovenfor fortæller os således intet om hvorvidt den danske vækst har været ”urovækkende” eller ej, i komparativt perspektiv.

Litteratur

- Bernard A. and S. Durlauf, 1996. Interpreting tests of the convergence hypothesis. *Journal of Econometrics* 71, 161-73
- Dalgaard, C-J og C.T. Kreiner, 1999. Global indkomstulighed i et væsktteoretisk perspektiv: En introduktion til konvergensdebatten. *Nationaløkonomisk Tidsskrift* 137, 305-32
- Dalgaard, C-J. og H. Hansen, 2010a, "Er der et dansk produktivitetskollaps?" *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 148, 1-20.
- David, H. A. og H. N. Nagaraja, 2003. *Order Statistics*, Third Edition. John Wiley & Son.
- Fisher, R. A. og F. Yates, 1963. *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, London: Oliver and Boyd.
- Økonomi- og Erhvervsministeriet, 2009. "Den danske produktivitetsudvikling", Økonomisk Tema 8.