

# Mikro Opgavesæt 6

Regnes til øvelserne 8–9/5

## Opgave 1

En virksomhed kan producere et output ved hjælp af et input, via produktionsfunktionen  $y = f(x) = Ax^a$  hvor  $A, a > 0$ . Prisen på output er  $p > 0$  og prisen på input er  $w > 0$ .

a) Vis at for  $t > 1$  er  $f(tx) = t^a f(x)$ . For hvilke værdier af parametrene  $A, a$  udviser teknologien voksende skalaafkast? Konstant skalaafkast?

b) Antag at der er konstant skalaafkast. Begrund at virksomhedens profit må være 0. Vis at virksomheden kun vil have positiv produktion ( $y, x > 0$ ) såfremt  $w/p = A$ . Bemærk således, at skal virksomheden med konstant skalaafkast faktisk producere noget, lægger det en restriktion på de relative priser.

c) Antag at der er voksende, ikke-konstant skalaafkast. Begrund at virksomhedens profit må være 0. Begrund at virksomheden ikke kan have positiv produktion.

d) Antag at  $a < 1$ . Løs virksomhedens profitmaksimeringsproblem. (Vink: problemet minder om opgave 2 på mikro-opgavesæt 1.)

## Opgave 2

Virksomheden har Cobb-Douglas produktionsfunktion  $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$  hvor  $A, a, b > 0$ .

a) Find marginalproduktet af hver vare. Hvilken betingelse på parametrene  $A, a, b$  sikrer at  $MP_1(x_1, x_2)$  er aftagende i  $x_1$ ? At  $MP_2(x_1, x_2)$  er aftagende i  $x_2$ ?

b) Find det teknologiske substitutionsforhold (TRS).

c) For givet  $y > 0$  er en isokvant givet ved ligningen  $y = f(x_1, x_2)$ . Omskriv denne ligning så du finder  $x_2$  som funktion af  $x_1$ . Skitsér en isokvant, og argumentér for at den er konveks.

d) Fra resultatet i c), find isokvantens hældning. Husk at  $y = f(x_1, x_2)$  og kontrollér nu at dit svar passer med TRS fundet i b).

e) Vis at for  $t > 1$  er  $f(tx_1, tx_2) = t^{a+b} f(x_1, x_2)$ . For hvilke værdier af parametrene  $A, a, b$  udviser teknologien voksende skalaafkast? Konstant skalaafkast?

### Opgave 3

En virksomhed har Cobb-Douglas produktionsfunktion  $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$  hvor  $A, a, b > 0$  og  $a + b = 1$ . Vi betragter virksomheden på langt sigt, hvor både  $x_1$  og  $x_2$  kan vælges frit. Virksomheden tager priserne  $p, w_1, w_2 > 0$  for givne.

- Vis at teknologien har konstant skalaafkast, og begrund at profitten må være 0.
- Begrund at  $TRS = -w_1/w_2$  hvis virksomheden har positiv produktion ( $y, x_1, x_2 > 0$ ).
- Fra opgave 2 b) kender du TRS, ellers beregn det nu. Løs så ligningen  $TRS = -w_1/w_2$  så du får  $x_2$  som funktion af  $x_1$ .
- Udnyt c) til at vise

$$y = A \left( \frac{bw_1}{aw_2} \right)^{1-a} x_1.$$

e) At profitten er nul, giver en ligning i  $y, x_1, x_2$ . Indsæt dine resultater fra c) og d) så du får en ligning i  $x_1$ . Bemærk at  $x_1 > 0$  kan udgå af denne ligning. Til slut har du en restriktion der involverer priserne  $p, w_1, w_2$ . Bemærk således, at skal virksomheden med konstant skalaafkast faktisk producere noget, lægger det en restriktion på de relative priser.

### Opgave 4

I denne opgave regnes på en Robinson Crusoe økonomi med et input, altså svarende til bogens kap. 30.1–8.

Forbrugeren har Cobb-Douglas præferencer,  $u(C, F) = C^{1/2}F^{1/2}$ . Her betegner  $C$  forbruget af kokosnødder, og  $F$  forbruget af fritid. Forbrugeren initialressourcer er  $(0, 1)$ , dvs. han besidder en enhed tid.

a) Idet forbrugeren tager priser  $p, w > 0$  for givne på hhv. kokosnødder og tid, opskriv den velkendte efterspørgsel efter  $C$  og  $F$  når hans indkomst er  $M$ .

Teknologien kan omforme tid til kokosnødder via produktionsfunktionen  $Y = L^{1/2}$ . Her betegner  $Y$  output af kokosnødder, og  $L$  input af arbejdstid.

b) For givne priser  $p, w > 0$ , opskriv løsningen på virksomhedens profitmaksimeringsproblem. Vær omhyggelig med at beregne virksomhedens profit  $\pi$  som funktion af  $p, w$ . (Vink: Problemet blev løst i opgave 2 på mikro-opgavesæt 1 og igen i opgave 1 ovenfor.)

c) Idet forbrugeren indkomst er værdien af initialressourcer plus profitten, dvs.  $M = w + \pi$ , opskriv forbrugeren efterspørgsel efter  $C$  og  $F$  som funktion af  $p, w$ .

d) Begrund at markederne clearer ved priserne  $p, w$  såfremt  $C = Y$  og  $F + L = 1$ . Lad  $p = 1$  og bestem det markedsclearende  $w$ . Opskriv derpå hvad  $C$  og  $F$  bliver i markedsligevægt.

e) Antag nu at økonomien ikke er organiseret som en markedøkonomi. I stedet har forbrugeren direkte kontrol over teknologien. Problemet er da at vælge  $C$  og  $F$  der maksimerer nytten, givet den teknologiske bibetingelse  $C = (1 - F)^{1/2}$ . Løs dette problem.

f) Kontrollér at løsningsværdierne for  $C$  og  $F$  var de samme i d) og e). Fortolk dette ud fra velfærdsteoremerne.