# Mikro Opgavesæt 1

Regnes til øvelserne 27–28/3

## Opgave 1

Vi vil gerne maksimere funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ under følgende betingelser: vi leder kun iblandt de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ som opfylder $x_1 \geq 0$ og $x_2 \geq 0$ og $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m$. Her har vi som parametre konstanterne $a, b, p_1, p_2, m$ som alle antages positive ($> 0$).

a) Find de partielle afledte af $f$. Vis at den afledte mht. $x_1$ er positiv medmindre $x_2 = 0$.

b) Begrund at en løsning på maksimeringsproblemet hverken kan have $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$ (vis altså, at der i så fald findes et andet par $(x_1', x_2')$ der opfylder betingelserne og giver større værdi af $f$).

c) Vis at en løsning ikke kan have $p_1 x_1 + p_2 x_2 < m$ (vis igen, at der i så fald findes et andet par $(x_1', x_2')$ der opfylder betingelserne og giver større værdi af $f$).

d) Omskriv nu ligningen $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$ så $x_2$ er en funktion af $x_1$.

e) Indsæt udtrykket fra (d) på $x_2$'s plads i funktionen $f(x_1, x_2)$, og løs nu problemet at maksimere $f$ ved at vælge $x_1$ optimalt (differentiér og sæt lig nul).

f) I (e) fandt du et udtryk for det maksimerende $x_1$ som funktion af parametrene $a, b, p_1, p_2, m$. Opskriv også $x_2$ som funktion af parametrene. Kontrollér at dine løsninger opfylder $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$.

g) Tag et overblik: tror du ovenstående metode løste det oprindelige problem at maksimere $f$ under de given betingelser? Hvorfor (ikke)?

## Opgave 2

Vi skal løse problemet at maksimere funktionen $g(y_1, y_2) = p_1 y_1 - p_2 y_2$ under følgende betingelser: vi leder kun iblandt de $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ som opfylder $y_1 \geq 0$ og $y_2 \geq 0$ og $y_1 \leq y_2^a$. Her har vi som parametre konstanterne $a, p_1, p_2$ som alle antages positive ($> 0$). Yderligere antages $a < 1$.

a) Find den afledte af funktionen $y_2^a$ og vis at denne afledte går imod $+\infty$ når $y_2$ går imod 0.

b) Begrund at en løsning på maksimeringsproblemet ikke kan have $y_2 = 0$.

c) Vis at en løsning ikke kan have $y_1 < y_2^a$.

d) Indsæt nu ligningen $y_1 = y_2^a$ på $y_1$'s plads i funktionen $g(y_1, y_2)$, og løs problemet at maksimere $g$ ved at vælge $y_2$ optimalt (differentiér og sæt lig nul).

e) I (d) fandt du et udtryk for det maksimerende $y_2$ som funktion af parametrene $a, p_1, p_2$. Opskriv også $y_1$ som funktion af parametrene. Kontrollér at dine løsninger opfylder $y_1 > 0$ og $y_2 > 0$.