Mikroøkonomi Projektopgave: Valg Under Usikkerhed

Peter Norman Sørensen, Økonomisk Institut

Forår 2003

1. Formalia [10 minutter]

Denne obligatoriske projektopgave er en guide til selvstudium af kapitel 6A–D. Projektets omfang er 1,5 ECTS og det udgør dermed 1/3 af to ugers fuldt arbejde, her omregnet til 24 timer og 40 minutter. I den forbindelse aflyses fire forelæsningsgange, mens to øvelsesgange erstattes af uformel hjælp til projektet. Nedenfor er angivet estimerede arbejdstider på forskellige dele af projektet — det antages at øvelsestimerne benyttes effektivt til at komme videre i projektet, så der er kun afsat et ekstra tidsforbrug på 2 timer til disse.

Projektet skal munde ud i en kort skriftlig aflevering — cirka 10 sider (hvis håndskrevet). Nedenfor er tydeligt markeret hvilke spørgsmål, der ønskes skriftligt besvaret. Det er tilladt at samarbejde om projektet, men de skriftlige besvarelser skal udarbejdes selvstændigt. Det er dog tilladt at grupper på 2 studerende kan aflevere en fælles besvarelse. Det afleverede skal godkendes som en forudsætning for at kunne gå til mundtlig eksamen. Hvis det bliver afvist kan projektet genafleveres en gang indenfor en individuelt aftalt tidsfrist.

Fristen for aflevering er kl. 15.00 den 29. april 2003. Opgaven afleveres til forelæseren.

2. Afsnit 6.A [30 minutter]

Læs dette afsnit for at få en introduktion til kapitlets indhold. Formålet med kapitlet er at udvikle en teori om hvordan forbrugere forholder sig i en usikker verden. I har tidligere fået en simpel indledning til dette emne i Varians kapitel 12. Denne projektopgave koncentrerer sig om afsnit 6.B og 6.C.

3. Afsnit 6.B [8 timer og 30 minutter]

Under visse antagelser om præferencerne (antagelser som virker plausible netop når der er tale om usikkerhed), kan de repræsenteres ved en nyttefunktion på en særlig form. Proposition 6.B.3 siger således at denne nyttefunktion kan opfattes som den forventede værdi af nogle nyttetal, som er knyttet til de mulige udfald.

3.1 Side 168–170 [1 time]

Sæt dig grundigt ind i denne beskrivelse af lotterier — hele kapitlet handler om dem.

3.2 Side 170–172 [1 time]

Vi har fået introduceret lotterierne, som en beslutningstager kan vælge imellem, og for at modellere beslutningstagerens valg, introduceres hans præferencer. Uafhængighedsantagelsen i definition 6.B.4 knytter sig specielt til valget imellem lotterier. Den vil spille en central rolle i Proposition 6.B.3.

3.3* Opgave til skriftlig besvarelse [1 time, 1 side]

Betragt mængden $\mathcal{L} = \Delta$ af simple lotterier med udfald i den endelige mængde C. Lad $\succsim$ være en rationel præferencerelation over $\mathcal{L}$.

(a) Begrund at simpleksets hjørner må kunne rangordnes under $\succsim$, og at vi derfor kan om-nummerere det endelige antal hjørner i rangorden, således at $e_N \succsim \cdots \succsim e_1$.

(b) Antag at $\succsim$ opfylder uafhængighedsaksiomet. Vis at $e_N \succsim L \succsim e_1$ for alle $L \in \mathcal{L}$.

3.4 Side 173–175 [90 minutter]

Dette afsnit fokuserer på nyttefunktioner på forventet-nytte form, og refererer kun perifert til præferencerne. Læs afsnittet og dets beviser. Bemærk at ligning (6.B.1) udtrykker at funktionen U er *affin* i L, selvom bogen med an almindelig misbrug af sproget kalder det for linearitet. Ligeledes er transformationerne i proposition 6.B.2 affine, ikke blot lineære.

3.5 Side 175–178 [2 timer]

Her er kapitlets hovedresultat. Rationelle præferencer, der er kontinuerte og opfylder uafhængighedsegenskaben, kan repræsenteres med en nyttefunktion på forventet-nytte form. Læs beviset for dette resultat grundigt.

3.6* Opgave til skriftlig besvarelse [30 minutter, 1/2 side]

Allernederst på side 177 er vi kommet frem til indifferensen

$$\beta L + (1-\beta) L' \sim [\beta U(L) + (1-\beta) U(L')] \bar{L} + [1 - \beta U(L) - (1-\beta) U(L')] \underline{L}.$$

Forklar udførligt hvordan man slutter fra denne indifferens til konklusionen øverst side 178, at $U(\beta L + (1-\beta) L') = \beta U(L) + (1-\beta) U(L')$.

3.7 Side 178–182 [90 minutter]

Resten af afsnittet diskuterer rimeligheden af teorien om forventet nytte. Fordyb dig ikke i dette afsnit nu, men bemærk hovedbudskabet at der er sået alvorlig tvivl om anvendeligheden af denne teori. Den ene Nobelprismodtager indenfor økonomi i år 2002 var Daniel Kahnemann, som gennem psykologiske eksperimenter har søgt at give et empirisk grundlag hvorpå man kunne bygge mere raffinerede teorier om valg under usikkerhed.

4. Afsnit 6.C [7 timer og 30 minutter]

Her bruges modellen fra 6.B med et helt bestemt udfaldsrum: et udfald identificeres med den pengemængde, lotteriet udbetaler. I dette tilfælde kan man tale om at en forventetnytte-maksimerende beslutningstager er risikoavers, dvs. ikke ønsker at påtage sig risiko. Risikoaversion karakteriseres (prop. 6.C.1), det modelleres at en beslutningstager er mere risikoavers end en anden beslutningstager (prop. 6.C.2), og der overvejes to modeller for hvordan en beslutningstagers risikoattitude kan variere med lotteriets gennemsnitlige gevinst (prop. 6.C.3 og 6.C.4).

4.1 Side 183–185 [1 time]

Læs dette afsnit, der introducerer grundmodellen for afsnittene 6.C og 6.D.

4.2 Side 185–187 (indtil eksemplerne) [90 minutter]

Her defineres og karakteriseres risikoaversion. Dette er en ganske udbredt antagelse i anvendelser af teorien om forventet nytte.

4.3 Side 187–189 [1 time]

Læs kort de tre eksempler på anvendelser af teorien (eksempel 6.C.3 er egentlig blot en fortsættelse af eksempel 6.C.2). Forsikringseksemplet er meget lig med en gennemgang fra Varians kapitel 12. Eksemplet med efterspørgsel efter et risikofyldt finansielt aktiv modellerer investering ud fra et mikro-synspunkt.

4.4* Opgave til skriftlig besvarelse [2 timer, 3 sider]

Antag at der findes to aktiver. Det første er risikofrit og yder altid 1. Det andet aktiv giverafkast a hhv. b med sandsynlighed π hhv. $1-\pi$. Lad (x_1, x_2) betegne et bundt af de to aktiver.

En risikoavers beslutningstager har præferencer på forventet nytteform. Hans formue er 1, og det er priserne på aktiverne også. Budgettet er altså $x_1 + x_2 = 1$, hvor $x_1, x_2 \geq 0$.

(a) Opskriv beslutningstagerens nyttemaksimeringsproblem.

(b) Giv en simpel *nødvendig* betingelse (der kun afhænger af a og b) for at der er positiv efterspørgsel efter det risikofri aktiv.

(c) Giv en simpel *nødvendig* betingelse (der kun afhænger af a, b og π) for at der er positiv efterspørgsel efter det risikable aktiv.

Herefter antages det, at betingelserne fra (b) og (c) er opfyldte, samt at $a < 1$.

(d) Opskriv førsteordensbetingelsen for nyttemaksimering.

(e) Vis (ved at analysere førsteordensbetingelsen med sætningen om den implicit givne funktion) at $dx_1/da \leq 0$. Fortolk!

(f) Hvilket fortegn vil du formode at $dx_1/d\pi$ har? Fortolk!

(g) Bevis din formodning fra (f) ved hjælp af førsteordensbetingelsen.

4.5 Side 190–192 [1 time]

Her sammenlignes to beslutningstageres risikoaversion. Brug ikke for lang tid på at læse dette.

4.6 Side 192–194 [1 time]

Her defineres og karakteriseres begreberne aftagende *absolut* risikoaversion og aftagende *relativ* risikoaversion. Brug ikke lang tid på at læse dette.

5. Afsnit 6.D [2 timer]

Der fortsættes med modellen fra 6.C. Da man i mange anvendelser ser på risikoaverse forventet-nytte beslutningstagere, er det relevant at kunne karakterisere hvilke lotterier de foretrækker.

5.1 Side 194–197 [1 time]

Der introduceres begrebet første-ordens stokastisk dominans. Ud fra fordelingsfunktionerne er det enkelt at afgøre om et lotteri stokastisk dominerer et andet ud fra dette begreb (figur 6.D.1) — sandsynlighederne er skiftet over i retning af de højere gevinster. Denne dominans er ensbetydende med at alle forventet-nytte beslutningstagere med voksende Bernoulli-funktioner vil foretrække det dominerende lotteri.

5.2 Side 197–199 [1 time]

På tilsvarende vis introduceres anden-ordens stokastisk dominans. Ud fra fordelingsfunktionerne er det relativt enkelt at afgøre om et lotteri dominerer et andet ud fra dette begreb (ulighed 6.D.2) — sandsynlighederne er rykket ind imod de mere gennemsnitlige gevinster. Dette er ensbetydende med at alle *risikoaverse* forventet-nytte beslutningstagere med voksende Bernoulli-funktioner vil foretrække det dominerende lotteri.

6*. Afsluttende opgave til skriftlig besvarelse [4 timer, 5 sider]

Denne opgave bygger på afsnit 6.C og bibringer modellen et simpelt markedsaspekt.

To individer, A og B, maksimerer begge forventet nytte, og har begge Bernoulli nyttefunktion $u(x) = -e^{-x}$ over slutformuer i $\mathbb{R}$. De er uenige om sandsynligheden for en nært forestående begivenhed, E. Der er to mulige tilstande: begivenheden vil enten indtræffe eller ikke indtræffe. Tænk gerne på E som hændelsen “Brøndby vinder sin næste fodboldkamp” hvor alternativet er, at Brøndby spiller uafgjort eller taber. Individ A mener at sandsynligheden for E er α, hvor B mener at sandsynligheden er β. Der gælder $1 > \alpha > \beta > 0$. Individ A har som udgangspunkt en formue $x_A \in \mathbb{R}$, og B har formue $x_B \in \mathbb{R}$.

De to har tænkt sig at indgå et væddemål med odds $p : 1$ for at E indtræffer. Det betyder i vores model, at hvis man har taget en enhed af væddemålet, så vinder man 1 hvis

E indtræffer, og man taber p hvis E ikke indtræffer. Individerne er pristagende, hvilket i denne sammenhæng betyder at de vædder som om p er givet.

(a) For givet værdi af $p > 0$, hvor mange enheder af væddemålet vil A optimalt tage? Bemærk, at svaret ikke afhænger af x_A.
Vink: Antag at A har taget $y \in \mathbb{R}$ enheder af væddemålet. Hvilket lotteri over slut-formuer står A så med, og hvad er den forventede nytte af dette lotteri? Maksimer denne nytte i y.

(b) For givet værdi af $p > 0$, hvor mange enheder af væddemålet vil B optimalt tage?

(c) Svarene i (a) og (b) giver efterspørgsler $y_A(p)$ og $y_B(p)$. Hvis de to skal vædde med hinanden, må der gælde ligevægtsbetingelsen $y_A(p) = -y_B(p)$. Løs denne ligning i p.

(d) Med svaret fra (c), gør rede for at $\beta/(1-\beta) < p < \alpha/(1-\alpha)$.

(e) Hvem påtager sig en positiv mængde af væddemålet, A eller B? Er dette intuitivt klart, når $\alpha > \beta$? Relater til eksemplet med en fodboldkamp.

Initialt har de to individer en risikofri formue. Nyttefunktionen er konkav, så de er risikoaverse. Ikke desto mindre er resultatet på opgave 2, at begge individer frivilligt indgår et væddemål, hvorefter deres slutformuer vil være risikofyldte. Dette fænomen vil vi nu søge en uddybende forklaring på. Definer $\pi > 0$ ved ligningen $p = \pi/\,(1-\pi)$.

(f) Løs ligningen, så du finder π som funktion af p. Check at $\beta < \pi < \alpha$, idet (d) benyttes.

(g) Lad en fiktiv person anse begivenheden E for at have sandsynlighed π. Vis da at væddemålet med odds $p : 1$ er aktuarisk fair — det har forventet værdi 0.

(h) Det ene individ har påtaget sig en positiv mængde af væddemålet. Vis nu at dette individ forventer et positivt afkast af væddemålet.

(i) Vis ligeledes, at det andet individ forventer et positivt afkast af sin (negative) side af væddemålet.

(j) Med relation til eksemplerne i 6.C, konkluder at det ikke er underligt at både A og B påtager sig et risikabelt afkast.

— SLUT —