Ugeseddel 6

Regnes inden øvelserne 17/3, 2003.

OBS: Øvelserne denne gang flyttet til E35A.

Opgave 0

Opgave 4 del ii) og iii) og opgave 5 fra ugeseddel 5.

Opgave 1

Betragt teknologier med et input z og et output q. En produktionsfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definerer et produktionsmulighedsområde $Y = \{(-z, q) \mid q \leq f(z) \text{ og } z \geq 0\}$. To teknologier Y_1 og Y_2 af denne slags er givne, med tilhørende produktionsfunktioner f_1 og f_2. Antag at begge produktionsfunktioner opfylder Inada betingelserne: $f_i(0) = 0$, f_i er kontinuert differentiabel ved alle $z > 0$, f_i er strengt voksende, f_i' er strengt aftagende, $\lim_{z \searrow 0} f_i'(z) = +\infty$, og $\lim_{z \to \infty} f_i'(z) = 0$. Vi ønsker at beskrive de produktionsmuligheder der fremkommer når man kan benytte begge teknologier på en gang, dvs. vi søger at beskrive mængden $Y_1 + Y_2$.

a) Givet noget input z, kan dette fordeles på de to virksomheder med $z_1, z_2 \geq 0$, der opfylder $z_1 + z_2 = z$. Givet en sådan fordeling, kan der højst opnås $f_1(z_1) + f_2(z_2)$ enheder output. Begrund nu, at $Y_1 + Y_2$ er beskrevet ved en produktionsfunktion f givet ved

$$f(z) = \max_{z_1, z_2} f_1(z_1) + f_2(z_2) \text{ under bibetingelserne } z_1 + z_2 = z \text{ og } z_1, z_2 \geq 0.$$

b) Begrund at maksimeringsproblemet for givet $z > 0$ har en entydig løsning $(z_1, z_2) \gg 0$ som opfylder førsteordesbetingelsen $f_1'(z_1) = f_2'(z_2)$. Vink: benyt Inada betingelserne.

c) Benyt indhylningssætningen til at vise $f'(z) = f_1'(z_1) = f_2'(z_2)$ hvor (z_1, z_2) er løsningen på maksimeringsproblemet givet z.

d) Begrund at resultaterne ovenfor harmonerer godt med bogens figur 5.E.1.

Opgave 2

Bogens opgave 5.E.1.

Opgave 3

Bevis proposition 5.E.1. Giv først de nødvendige definitioner.

Opgave 4

Proposition 5.E.1 kan tolkes således, at den samlede produktion i en økonomi uden tab af generalitet kan opfattes som stammende fra en enkelt virksomhed — denne virksomhed kunne da kaldes for økonomiens repræsentative virksomhed. Bogens kapitel 4 beskæftigede sig med det tilsvarende emne på efterspørgselssiden af økonomien. Vi vil her se på hovedpointen, at summen af forskellige forbrugeres efterspørgsler giver en funktion, som ikke i sig selv behøver være efterspørgslen for nogen forbruger — der vil således være et tab af generalitet når man antager at økonomien har en repræsentativ forbruger.

Givet er nogle forbrugere, $i = 1 \ldots, I$. Hver forbruger i har forbrugsmulighedsområde $\mathbb{R}^L_+$ og præferencer $\succsim_i$ der er kontinuerte, lokalt umættede og strengt konvekse.

Antag, at økonomien har en aggregeret indkomst w, med en fast fordelingsnøgle, således at forbruger i's indkomst er $\mathrm{w}_i = \alpha^i \mathrm{w}$. Her er alle $\alpha^i > 0$ og $\sum_{i=1}^I \alpha^i = 1$.

Givet $p \gg 0$ og $\mathrm{w} > 0$ er forbruger i's efterspørgsel den entydige løsning på forbrugerens problem, $x^i(p, \mathrm{w}^i)$. Den aggregerede efterspørgsel defineres ved $x^*(p, \mathrm{w}) = \sum_{i=1}^I x^i(p, \alpha^i \mathrm{w})$.

a) Vis at x^* opfylder Walras' Lov og er homogen af grad 0.

b) Argumentér grafisk for, at der kan konstrueres pæne præferencer, der giver disse data: Økonomien har to forbugere og to varer. $\mathrm{w} = 2.000$ og $\alpha^1 = \alpha^2 = 1/2$, så $\mathrm{w}^1 = \mathrm{w}^2 = 1.000$. Ved priserne $(10, 10)$ vælger den ene forbruger $(25, 75)$ og den anden vælger $(75, 25)$. Ved priserne $(15, 5)$ vælger den første forbruger $(40, 80)$ mens den anden vælger $(64, 8)$.

c) Udregn den aggregerede efterspørgsel x^* i de to situationer i b). Vis at x^* ikke overholder det svage aksiom for afslørede præferencer (definition 2.F.1).

d) Konkludér, at økonomiens aggregerede efterspørgsel, $x^*(p, \mathrm{w})$ ikke generelt kan siges at være løsningen på en enkelt forbrugers problem.

Opgave 5 (skriftlig)

To et-input-et-output teknologier er begge beskrevet ved produktionsfunktionen $\sqrt{2z}$.

a) Benyt resultaterne i opgave 1 til at vise at produktionsfunktionen $2\sqrt{z}$ beskriver den aggregerede teknologi.

b) Givet inputpris $\mathrm{w} > 0$ og outputpris $p > 0$, løs direkte profitmaksimeringsproblemet for hver af de to virksomheder og for den aggregerede virksomhed.

c) Check at løsningerne i b) passer med bogens proposition 5.E.1.