Hjemmeopgave 1

MAKROØKONOMI 1, EFTERÅR 2003
MATEMATIK-ØKONOMI

Henrik Jensen
Københavns Universitets
Økonomiske Institut
Hjemmeside: www.econ.ku.dk/personal/henrikj/makro1-E2003/

Betragt følgende Solow model formuleret i kontinuert tid:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= F[K(t), A(t)L(t)], && (1)\\
\dot{L}(t) &= nL(t), \quad n>0, && (2)\\
\dot{A}(t) &= gA(t), \quad g>0, &&\\
\dot{K}(t) &= I(t)-\delta K(t), \quad 0<\delta, && (3)\\
I(t) &= sY(t), \quad 0<s<1, && (4)
\end{aligned}$$

hvor $Y(t)$ er output, $K(t)$ er kapitalapparatet, $L(t)$ er arbejdskraft (befolkningen), n er befolkningsvækstraten, g er væksraten i teknologiniveauet, $I(t)$ er bruttoinvesteringerne, δ er afskrivningsraten på kapitalapparatet, s er opsparingsraten, og $F[K(t), A(t)L(t)]$ er en produktionsfunktion, hvorom der gælder *konstant skalaafkast*, dvs.:

$$F[cK(t), cA(t)L(t)] = cF[K(t), A(t)L(t)], \quad \text{for alle } c \geq 0. \tag{5}$$

(i) Beskriv kort modellens relationer.

(ii) Omskriv akkumulationsligningen (3) til en beskrivelse af udviklingen i $\widetilde{k}(t) \equiv K(t)/[A(t)L(t)]$, som funktion af s, n, g, δ, og $\widetilde{k}(t)$. Anvend til dette formål, at $f\left[\widetilde{k}(t)\right] \equiv F\left[\widetilde{k}(t), 1\right] = Y(t)/[A(t)L(t)] \equiv \widetilde{y}(t)$ (hvor næstsidste lighedstegn følger af (5)).

(iii) Det antages fremover, at $f[0]=0$, $f'\left[\widetilde{k}(t)\right]>0$, $f''\left[\widetilde{k}(t)\right]<0$, $\lim_{\widetilde{k}(t)\to 0} f'\left[\widetilde{k}(t)\right] = \infty$, $\lim_{\widetilde{k}(t)\to\infty} f'\left[\widetilde{k}(t)\right]=0$. Eksemplificér grafisk $f\left[\widetilde{k}(t)\right]$, $sf\left[\widetilde{k}(t)\right]$ og $(n+g+\delta)\widetilde{k}(t)$, og vis på den baggrund positionerne for steady-state værdierne for $\widetilde{k}(t)$ og $\widetilde{y}(t)$ (dvs. hvor $\dot{\widetilde{k}}(t) = \dot{\widetilde{y}}(t) = 0$), benævnt hhv. $\widetilde{k}^*(t)$ og $\widetilde{y}^*(t)$. Hvad er vækstraten i output pr. capita, $Y(t)/L(t)$, i denne steady state? Forklar.

(iv) Antag, at økonomien befinder sig i ovenstående steady state, og antag nu, at vækstraten i befolkningen falder permanent. Hvad sker der med hhv. $\widetilde{k}^*(t)$ og $\widetilde{y}^*(t)$? Vis situationen grafisk, og forklar intuitivt. Skitsér, hvad der sker med $k(t)$ og $y(t)$ på vej til den nye steady state. Hvad er vækstraten i output pr. capita $Y(t)/L(t)$ i den nye steady state? Hvorledes er niveauet for $Y(t)/L(t)$ ændret? Forklar.

(v) Antag nu, at produktionsfunktionen er givet ved følgende Cobb-Douglas specifikation:

$$f\left[\widetilde{k}(t)\right] = \widetilde{k}(t)^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{6}$$

Hvad er de eksplicitte løsninger for $\widetilde{k}^*(t)$, $\widetilde{y}^*(t)$ samt steady-state værdien for forbruget pr. "effektiv arbejdskraft," $\widetilde{c}^*(t) \equiv \{C(t)/[A(t)L(t)]\}^*$? [vink: husk på, at $\widetilde{c}(t) = (1-s)\widetilde{y}(t)$] Diskutér hvorledes s og n påvirker disse udtryk.

(vi) Find den værdi af $\widetilde{k}^*(t)$, som maksimerer steady-state forbruget pr. "effektiv arbejdskraft" [vink: find s som en funktion af $\widetilde{k}^*(t)$ og indsæt dette i udtrykket for $\widetilde{c}^*(t)$ fundet under (v)]. Hvilken opsparingsrate vil sikre denne værdi af $\widetilde{k}^*(t)$?

(vii) Antag at det relevante velfærdskriterium i denne økonomi er givet ved funktionen

$$W_0 = \int_{t=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho t}\widetilde{c}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \rho > 0. \tag{7}$$

Dvs. en "vægtet sum" af $\widetilde{c}(t)$ herfra til evigheden, men hvor værdier af $\widetilde{c}(t)$ tættere på $t = 0$ ("nutiden") har større vægt end værdier af $\widetilde{c}(t)$ langt fra $t = 0$ ("fremtiden"). Antag, at økonomien er i steady state ved $t = 0$.

a) Antag at opsparingsraten er *højere* end den under (vi) fundne. Vil en permanent marginal *reduktion* i opsparingsraten forøge velfærden i økonomien? En verbal diskussion er tilstrækkelig.

b) Antag at opsparingsraten er *lavere* end den under (vi) fundne. Vil en permanent marginal *forøgelse* i opsparingsraten forøge velfærden i økonomien? En verbal diskussion med vægt på betydningen af ρ er tilstrækkelig.