CES $\rightarrow$ Cobb-Douglas for $\rho \rightarrow 0$

Christian Fenger

1. november 2003

I Jones (Economic Growth, 2.ed.) kapitel 9.5 gives en CES (constant elasticity of substitution) produktionsfunktion

$$Y_{CES} \equiv (K^{\rho} + (BE)^{\rho})^{1/\rho}$$

Ved at ændre denne en smule kan man vise at den bliver til en Cobb-Douglas produktionsfunktion når ρ går mod nul.

Vi bemærker at $K^{\rho} \rightarrow 1$ og $(BE)^{\rho} \rightarrow 1$ for $\rho \rightarrow 0$. Dermed har vi at $Y \rightarrow \infty$ for $\rho \rightarrow 0$. Det er derfor oplagt at Y_{CES} ikke går mod en Cobb-Douglas produktionsfunktion i sin nuværende form. Hvis vi derimod ændrer CES produktionsfunktionen til:

$$\tilde{Y}_{CES} \equiv (\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho})^{1/\rho}$$

så får vi at den går mod en Cobb-Douglas produktionsfunktion for ρ gående mod nul.

Tag logaritmen:

$$\log(\tilde{Y}_{CES}) = \frac{\log(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho})}{\rho}$$

Vi bemærker at både tæller og nævner går mod nul, og brøken er derfor umiddelbart udetermineret for $\rho \rightarrow 0$. Vi vil derfor benytte l'Hopitals regel. Vi definerer tælleren:

$$f(\rho) \equiv \log(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho})$$

Og vi definerer nævneren

$$g(\rho) \equiv \rho$$

l'Hopitals regel er anvendbar for $\rho \rightarrow 0^{+}$ da f og g er kontinuerte og differentiable på $]0,\infty[$ og $\frac{d}{d\rho}g(\rho) \neq 0 \forall x \in]0,\infty[$. Vi har

$$\frac{f(\rho)}{d\rho} = \frac{\alpha K^{\rho}\log(K) + (1-\alpha)(BE)^{\rho}\log(BE)}{\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)(BE)^{\rho}}$$

hvor vi benyttede at $\frac{d}{dx}a^{x} = a^{x}\log(a)$ og $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$. Da $K^{\rho} \rightarrow 1$ og $(BE)^{\rho} \rightarrow 1$ for $\rho \rightarrow 0$ så

$$\frac{df(\rho)}{d\rho} \rightarrow \alpha\log(K) + (1-\alpha)\log(BE) \quad \text{for} \quad \rho \rightarrow 0$$

Med $\frac{d}{d\rho}g(\rho) = 1$ giver l'Hopitals regel os at

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0^{+}} \log(\tilde{Y}_{CES}) &= \lim_{\rho \rightarrow 0^{+}} \frac{\frac{d}{d\rho}f(\rho)}{\frac{d}{d\rho}g(\rho)} \\ &= \alpha\log(K) + (1-\alpha)\log(BE) \\ &= \log(K^{\alpha}(BE)^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

Og dermed

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^{+}} \tilde{Y}_{CES} = K^{\alpha}(BE)^{1-\alpha}$$

som vi genkender som en Cobb-Douglas produktionsfunktion hvor teknologien forøger energien.

Det kan udledes at $\tilde{Y}_{CES}$ også er en CES produktionsfunktion med samme substitutionselasticitet som Y_{CES}.