Rettevejledning til
Tag–Med-Hjem-Eksamen
Makroøkonomi, 2. Årsprøve
Efterårssemestret 2004

Modellen for lukket økonomi gentaget fra opgaven:

$$Y_t = K_t^{\alpha} H_t^{\varphi} L_t^{1-\alpha-\varphi}, \quad 0 < \alpha, \varphi < 1, \alpha + \varphi < 1 \tag{1}$$

$$K_{t+1} - K_t = s_K Y_t, \quad 0 < s_K < 1 \tag{2}$$

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t, \quad 0 < s_H < 1 \tag{3}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t, \quad n > 0 \tag{4}$$

Der anvendes definitionerne:

$$y_t \equiv Y_t / L_t, \quad k_t \equiv K_t / L_t, h_t \equiv H_t / L_t, \quad c_t \equiv (1 - s_K - s_H) y_t.$$

1. Profitmaksimering indebærer, at den repræsentative virksomhed efterspørger fysisk kapital K_t og arbejdskraft L_t op til det punkt, hvor disse faktorers grænseprodukter er lig med de givne faktorlønninger, henholdsvis r_t og w_t. Ved beregning af (specielt) arbejdskraftens grænseprodukt skal tages højde for, hvordan dette påvirkes af humankapitalen. Da K_t, H_t og L_t er givne (prædeterminerede), og K_t og L_t udbydes uelastisk, er det grænseprodukterne evalueret ved disse prædeterminerede værdier, der skal svare til faktoraflønningerne.

Da humankapital er uløseligt knyttet til arbejdere, og hver arbejder indeholder samme mængde h_t, skal der skal tages højde for $H_t = h_t L_t$ ved beregning af arbejdets grænseprodukt, dvs. h_t og ikke H_t skal holdes fast (så ved en øgning i L_t følger H_t automatisk med):

$$Y_t = K_t^{\alpha} (h_t L_t)^{\varphi} L_t^{1-\alpha-\varphi} = K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} L_t^{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$r_t = \alpha K_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi} L_t^{1-\alpha} = \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi} \tag{5}$$

$$w_t = (1-\alpha) K_t^{\alpha} h_t^{\varphi} L_t^{-\alpha} = (1-\alpha) k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}, \tag{6}$$

som er opgavetekstens (5) og (6) i let omskrevet form (her står k_t i stedet for K_t/L_t osv.).

Fra (1) er per capita produktionsfunktionen $y_t = k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}$. Det følger så fra (5) og (6), at $r_t k_t = \alpha y_t$ og $w_t = (1-\alpha) y_t$.

I en vilkårlig periode t er tilstandsvariablene K_t, H_t og L_t prædeterminerede. Ligningerne (1), (5) og (6) bestemmer så direkte Y_t, r_t og w_t. Med Y_t bestemt og de givne K_t og H_t, fastlægger (2) og (3) henholdsvis K_{t+1} og H_{t+1}. Ligning (4) bestemmer direkte L_{t+1} ud fra L_t. Nu haves næste periodes værdier K_{t+1}, H_{t+1} og L_{t+1} af de tre tilstandsvartiable osv. (En illustration af dynamikken i pilediagram pynter). Det følger, at givet initiale værdier K_0, H_0 og L_0 fastlægger modellen det fulde forløb for alle de endogene variable.

2. Det dynamiske system, bevægelsesloven, opstilles på en måde, som basalt set kendes fra pensum (kapitel 6). Der kan tages udgangspunkt i kapitalakkumulationsligningerne (2) og (3). Fra (2) fås ved (efter let omskrivning) at dividere på begge sider med L_{t+1} $(= (1+n)L_t)$:

$$K_{t+1} = s_K Y_t + K_t \Leftrightarrow$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s_K y_t + k_t\right) \Leftrightarrow$$

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + k_t\right),$$

hvor $y_t = k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}$ blev brugt til sidst. Samme operationer ud fra (3) giver i alt det dynamiske system:

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + k_t\right)$$

$$h_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left(s_H k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} + h_t\right)$$

som ved fratrækning af henholdsvis k_t og h_t på begge sider kan skrives:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}\left(s_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} - n k_t\right) \tag{8}$$

$$h_{t+1} - h_t = \frac{1}{1+n}\left(s_H k_t^{\alpha} h_t^{\varphi} - n h_t\right) \tag{9}$$

Hver af disse siger, at tilvæksten i kapital (fysisk eller human) per capita fremkommer ved et bidrag fra investering per capita ($s_K y_t = s_K k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}$ og $s_H y_t = s_H k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}$ for henholdsvis fysisk og human-kapital) behørigt udtyndet af befolkningsvækst (faktoren $1/(1+n)$ foran parantesen) og et fradrag fra, at befolkningsvækst også udtynder den allerede tilstedeværende mængde kapital (fradragene henholdsvis $-nk_t/(1+n)$ og $-nh_t/(1+n)$).

3. Steady state-værdierne findes ved at bruge $k_{t+1} - k_t = 0$ og $h_{t+1} - h_t = 0$. Ud fra (8) og (9) findes (idet steady state-værdierne betegnes k og h):

$$s_K k^\alpha h^\varphi = nk$$

$$s_H k^\alpha h^\varphi = nh$$

Disse kan nemt løses, fx ved at isolere h i den første:

$$h = \left(\frac{n}{s_K} k^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{\varphi}}$$

og indsætte dette h i den anden skrevet som $s_H k^\alpha = n h^{1-\varphi}$:

$$s_H k^\alpha = n \left(\frac{n}{s_K} k^{1-\alpha} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{s_H}{n} \left(\frac{s_K}{n} \right)^{\frac{1-\varphi}{\varphi}} = k^{\frac{1-\alpha-\varphi}{\varphi}} \Leftrightarrow$$

$$k = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^\varphi}{n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}}$$

Parellelt hermed for h og idet steady state-løsninger betegnes med * haves:

$$k^* = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^\varphi}{n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}} \tag{10}$$

$$h^* = \left(\frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\varphi}} \tag{11}$$

Herefter fås fra $y_t = k_t^\alpha h_t^\varphi$:

$$y^* = \left(\frac{s_K^{1-\varphi} s_H^\varphi}{n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_K^\alpha s_H^{1-\alpha}}{n} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}},$$

som ved omskrivning og efterfølgende brug af $c_t = (1 - s_K - s_H) y_t$ giver:

$$y^* = \left(\frac{s_K}{n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}, \quad c^* = (1 - s_K - s_H) \left(\frac{s_K}{n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \tag{12}$$

Fra (5) og fra $w_t = (1 - \alpha) y_t$:

$$r^* = \frac{\alpha n}{s_K}, \quad w^* = (1 - \alpha) \left(\frac{s_K}{n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \tag{13}$$

Man bemærker, at r^* er uafhængig af s_H. (Den intuitive forklaring heraf er ikke så ligetil og kræves ikke).

Hvis velstand måles ved indkomst per capita eller evt. ved reallønnen ses, at større værdier af s_K og s_H og mindre værdier af n, tenderer at give højere velstand. Forklaringen er ligetil: Med højere invsteringskvoter akkumuleres mere kapital per capita i steady state, men med højere befolkningsvækstrate tyndes kapital per capita mere ud fra periode til periode og fører derfor til mindre kapital per capita.

Hvis velstand måles ved forbrug per capita, hvilket kan være mere relevant, ses at mindre n igen giver højere c^* (og af samme grund), men højere s_K og s_H vil kun give højere c^* op til golden rule-værdierne på henholdsvis α og φ (de værdier af s_K og s_H, der maksimerer c^*; disse findes ved differentiation osv. af c^* mht. s_K of s_H). Årsagen er naturligvis, at jo større en andel af BNP, der investeres, jo mindre en andel er tilbage til forbrug, hvilket giver en modvirkende faktor til påvrkningen af y^*. Da α og φ normalt anses for at ligge på omkring 1/3, og observerede investeringsrater typisk ligger en del under dette niveau, vil større s_K og s_H normalt også indebære større forbrug per capita i steady state.

Modellen for åben økonomi gentaget fra opgaven:

$$Y_t = K_t^\alpha H_t^\varphi L_t^{1-\alpha-\varphi} \tag{14}$$

$$V_t = K_t + F_t \tag{15}$$

$$Y_t^n = Y_t + \bar{r} F_t, \quad \bar{r} > 0 \tag{16}$$

$$V_{t+1} - V_t = s_K Y_t^n \tag{18}$$

$$H_{t+1} - H_t = s_H Y_t^n \tag{19}$$

$$L_{t+1} = (1+n) L_t \tag{20}$$

$$\bar{r} = \alpha \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^{\varphi} \tag{21}$$

$$w_t = (1-\alpha) \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^{\varphi} \tag{22}$$

[Der er ikke nogen ligning (17), hvilket er en lille nummereringsfejl i opgaveteksten. Modellen, som den står, er imidlertid korrekt, den består blot af ligningerne (14) - (16) samt (18) - (22). De studerende er oplyst om dette på hjemmesiden kort efter eksamens start].

Der anvendes nu også definitionerne:

$$y_t^n \equiv Y_t^n/L_t, \quad v_t \equiv V_t/L_t, \quad f_t \equiv F_t/L_t, \quad c_t \equiv (1 - s_K - s_H) y_t^n.$$

4. Ligningerne omtales, fx siger (15) at Indlandets nettoaktiver i periode t er forskellen mellem den samlede formue V_t ejet af indlændinge og den i Indlandet placerede kapital K_t, og (16) definerer nationalindkomsten, som den i Indlandet skabte indkomst plus nettooverførsler fra udlandet (afkastet på Indlandets nettoaktiver).

Ligning (21) er den centrale internationale arbitragebetingelse for kapital. På venstresiden er den internationale realrente, på højresiden grænseproduktet for indenlandsk kapital, dvs. afkastgraden på (fysisk) kapital placeret i Indlandet. Hvis dette overstiger den internationale realrente vil kapital strømme ind i Indlandet, hvilket vil øge K_t og dermed trække den indenlandske kapitalafkastgrad ned mod $\bar{r}$ (og vice versa). Kapitalindstrømning (udstrømning) sikrer således, at afkastgraden på kapital placeret i Indlandet i hver periode kommer til at svare nøje til den givne internationale realrente.

Med givne (prædeterminerede) værdier V_t, H_t og L_t af de tre tilstandsvariable i periode t, ses det, at (21) bestemmer K_t (springvis, dvs. tilpaset inden for én periode) i overensstemmelse med den just beskrevne arbitrage. Da således K_t er blevet bestemt, og H_t og L_t allerede var givne, ses det, at (14) bestemmer Y_t, (15) bestemmer F_t (som de nettoaktiver $V_t - K_t$, der følger af K_t og det givne V_t), og (22) bestemmer w_t (som den imndenlandske arbejdskrafts grænseprodukt ved de prædeterminerede H_t og L_t og det ved arbitrage fastlagte K_t). Med både Y_t og F_t bestemt fastlægger (16) nationalindkomsten Y_t^n, hvorefter (18) og (19) bestemmer V_{t+1} og H_{t+1}. Ligning (20) bestemmer direkte L_{t+1}. Nu er de tre tilstandsvariables værdier i periode $t+1$ fastlagt osv. (Pilediagram pynter igen).

5. Ligesom i den lukkede økonomi følger fra (14) $y_t = k_t^\alpha h_t^\varphi$. Man kan skrive (21) som: $\bar{r} = \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^\varphi$. Ved at gange med k_t på begge sider fås: $\bar{r} k_t = \alpha k_t^\alpha h_t^\varphi = \alpha y_t$. Fra (22) haves: $w_t = (1-\alpha) k_t^\alpha h_t^\varphi = (1-\alpha) y_t$. Ved at summere de to sidste fås: $\bar{r} k_t + w_t = y_t$, så BNP (per capita) fordeler sig fuldt ud på løn, som jo indeholder afkast til human kapital, og afkast på fysisk kapital placeret i Indlandet med andelene $1-\alpha$ og α. (Dette fortæller naturligvis ikke noget om, hvordan nationalindkomsten, BNI, fordeler sig).

Fra (16) fås ved at dividere på begge sider med L_t og derefter bruge (15) og $y_t - \bar{r} k_t = w_t$:

$$y_t^n = y_t + \bar{r} f_t = y_t + \bar{r}(v_t - k_t) = y_t - \bar{r} k_t + \bar{r} v_t \Rightarrow$$

$$y_t^n = w_t + \bar{r} v_t \tag{23}$$

Nationalindkomsten per capita er summen af reallønnen og afkastet på nationalformuen per capita. Indkomstkilderne er således arbejdskaft som udstyret med human kapital per capita og national formue per capita.

For en given (prædetermineret) værdi for h_t $(= H_t/L_t)$, bestemmer (21), skrevet som $\bar{r} = \alpha k_t^{\alpha-1} h_t^{\varphi}$, springvis k_t som:

$$k_t = \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}, \tag{24}$$

hvorefter y_t - stadig givet h_t - fra $y_t = k_t^{\alpha} h_t^{\varphi}$ må være:

$$y_t = \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} \tag{25}$$

og $w_t = (1-\alpha) y_t$ er så:

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} \tag{26}$$

Det kan evt. bemærkes, at k_t/y_t $(= K_t/Y_t)$ springer direkte til:

$$\left(\frac{k_t}{y_t}\right)^* = \frac{\alpha}{\bar{r}},$$

ligesom k_t/w_t springer direkte til:

$$\left(\frac{k_t}{w_t}\right)^* = \frac{\alpha}{\bar{r}}\frac{1}{1-\alpha}$$

6. Det dynamiske system for den åbne økonomi opstilles som følger, hvor fremgangsmåden kombinerer udledninger kendt fra pensums kapitel 4 og 6:

Fra (18) er $V_{t+1} = V_t + s_K Y_t^n$, så ved at dividere på begge sider med L_{t+1} $(= (1+n)L_t)$ og dernæst bruge (23) og (26) fås:

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left(v_t + s_K y_t^n\right) = \frac{1}{1+n}\left(v_t + s_K\left(w_t + \bar{r} v_t\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+n}\left(\left(1 + s_K \bar{r}\right) v_t + s_K \overbrace{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}}^{w_t}\right). \end{aligned}$$

Fra (19) er $H_{t+1} = H_t + s_H Y_t^n$, hvorfra ved lignende operationer fås:

$$\begin{aligned} h_{t+1} &= \frac{1}{1+n}\left(h_t + s_H y_t^n\right) = \frac{1}{1+n}\left(h_t + s_H\left(w_t + \bar{r} v_t\right)\right) \\ &= \frac{1}{1+n}\left(s_H \bar{r} v_t + h_t + s_H \overbrace{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}}^{w_t}\right). \end{aligned}$$

Når systemet udtrykkes i ændringer over tid (henholdsvis v_t og h_t trækkes fra på begge sider) fås:

$$v_{t+1} - v_t = \frac{1}{1+n}\left(-\left(n - s_K\bar{r}\right)v_t + s_K\overbrace{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}}^{w_t}\right) \tag{27}$$

$$h_{t+1} - h_t = \frac{1}{1+n}\left(s_H\bar{r}v_t - nh_t + s_H\overbrace{(1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}}^{w_t}\right) \tag{28}$$

Den intuitive forklaring af (27) er: Tilvæksten $v_{t+1} - v_t$ i formue per capita kommer fra et bidrag fra investering i formue per capita ($s_K y_t^n = s_K w_t + s_K \bar{r} v_t$) udtyndet af befolkningsvækst og et fradrag for, at allerede akkumuleret formue per capita udtyndes ved befolkningsvækst. Ligning (28) rummer de tilsvarende elemeneter, blot for humankapital.

Betingelsen

$$n > s_K\bar{r} \tag{29}$$

er rimelig ud fra empirisk baserede overvejelser, idet med L_t fortolket som *effektivt* arbejdsinput, hvor n er vækstraten i arbejdsstyrken i effektivitetsenheder, er fx $n = 0,025$ rimeligt, mens fx et s_K på 0,25 og et $\bar{r}$ på 0,05 må anses for store værdier. Med disse værdier er (29) rigeligt opfyldt $(0,025 > 0,0125)$.

7. Steady state beregnes fra $v_{t+1} - v_t = 0$ og $h_{t+1} - h_t = 0$. Dette giver, når de konstante værdier betegnes v og h:

$$\left(n - s_K\bar{r}\right)v = s_K\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}$$

$$nh = s_H\bar{r}v + s_H\left(1-\alpha\right)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}$$

Man kan gå frem som følger. Det er her - for enkelheds skyld - valgt et øjeblik at bruge benævnelsen q^* for en indgående faktor:

$$q^* \equiv (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Fra den første af de ovenstående ligninger fås så:

$$v = \frac{s_K q^*}{n - s_K\bar{r}} h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}},$$

som ved indsætning i den anden giver:

$$nh = s_H \bar{r} \frac{s_K}{n - s_K \bar{r}} q^* h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} + s_H q^* h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} = \left(\frac{s_K s_H \bar{r}}{n - s_K \bar{r}} + s_H \right) q^* h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} = \frac{n s_H}{n - s_K \bar{r}} q^* h^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$h^{\frac{1-\alpha-\varphi}{1-\alpha}} = \frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} q^* \Leftrightarrow$$

$$h = \left(\frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} q^* \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}},$$

hvorfra fås ved indsættelse i udtrykket for v ovenfor:

$$v = \frac{s_K q^*}{n - s_K \bar{r}} \left(\frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} q^* \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} = s_K s_H^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{q^*}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}.$$

Når nu definitionen af q^* indsættes, og betegnelsen * bruges for steady state, fås nemt opgaveteksten (30) og (31), dvs.:

$$v^* = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} s_K s_H^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \tag{30}$$

$$h^* = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} s_H^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \tag{31}$$

8. Tidligere fandtes i ligning (26) reallønnen w_t udtrykt ved h_t. Når steady state-værdien h^* for h_t indsættes fra (31), fås steady state-værdien for reallønnen:

$$\begin{aligned} w^* &= (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} s_H^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \right]^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} \\ &= (1-\alpha) \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} s_H^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha\varphi}{(1-\alpha)(1-\alpha-\varphi)}} \left(\frac{1}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \end{aligned}$$

Ved at lægge eksponenter korrekt sammen osv. fås så:

$$w^* = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} \right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \tag{32}$$

Det er bekvemt at udtrykke øvrige steady state-størrelser ved w^* og parametre. Værdien for w^* kan altid hentes fra (32), når det skal bruges. Fra (30) og (32) fås ved de relevante forkortninger:

$$\frac{v^*}{w^*} = \frac{s_K}{n - s_K \bar{r}} \Leftrightarrow$$

$$v^* = \frac{s_K}{n - s_K \bar{r}} w^* \tag{33-1}$$

Fra (31) og (32) på lignende vis:

$$\frac{h^*}{w^*} = \frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} \Leftrightarrow$$

$$h^* = \frac{s_H}{n - s_K \bar{r}} w^* \tag{33-2}$$

Da $w_t = (1 - \alpha) y_t$ haves:

$$y^* = \frac{1}{1 - \alpha} w^* \tag{34}$$

Fra (23) er $y_t^n = w_t + \bar{r} v_t$. Steady state-værdien y^{n*} fås ved at indsætte w^* for w_t og v^* fra (33-1) for v_t:

$$y^{n*} = w^* + \bar{r} \frac{s_K}{n - s_K \bar{r}} w^* = \frac{n}{n - s_K \bar{r}} w^* \tag{35-1}$$

hvorfra c^* følger af $c_t = (1 - s_K - s_H) y_t^n$:

$$c^* = (1 - s_K - s_H) \frac{n}{n - s_K \bar{r}} w^* \tag{35-2}$$

Ved at gå tilbage til (24) og (26) fås (som allerede bemærket):

$$\frac{k_t}{w_t} = \frac{\alpha}{\bar{r}} \frac{1}{(1 - \alpha)},$$

hvorfor:

$$k^* = \frac{\alpha}{\bar{r}} \frac{1}{(1 - \alpha)} w^* \tag{36-1}$$

Så fås fra $f^* = v^* - k^*$ og ved at bruge (33-1) og (36-1):

$$\begin{aligned} f^* &= \left(\frac{s_K}{n - s_K \bar{r}} - \frac{\alpha}{\bar{r}} \frac{1}{(1 - \alpha)} \right) w^* \\ &= \frac{s_K \bar{r} (1 - \alpha) - \alpha (n - s_K \bar{r})}{(1 - \alpha) \bar{r} (n - s_K \bar{r})} w^* \\ &= \frac{s_K \bar{r} - \alpha n}{(1 - \alpha) \bar{r} (n - s_K \bar{r})} w^*, \end{aligned}$$

hvorfra:

$$f^* = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{s_K}{\bar{r}} \frac{\bar{r} - \frac{\alpha n}{s_K}}{(n - s_K \bar{r})} w^* \tag{36-2}$$

Det ses direkte fra (36-2), at med de gjorte antagelser - herunder $n > s_K \bar{r}$ - haves at $f^* > 0$ netop når $\bar{r} > \alpha n / s_K$. Fra (13) er $\alpha n / s_K$ steady state-realrenten for den lukkede økonomi, nu kaldet r_c^*. Betingelsen for at Indlandet ender som nettokreditor efter en åbning er altså, at $\bar{r} > r_c^*$, altså at den internationale realrente er større end den realrente, Indlandet selv ville frembringe som lukket. Intuitivt er dette jo netop betingelsen for, at kapital vil søge *ud* af Indlandet, og dermed gøre Indlandet til nettokreditor, når frie kapitalbevægelser tillades.

Ved inspektion af (evt. differentiation på) formlerne (32) og (35) ses, at det (ligesom i den lukkede økonomi) gælder, at større værdier for s_K og s_H og mindre værdier for n trækker reallønnen w^* og nationalindkomsten y^{n*} i steady state entydigt opad, fortsat givet restriktionen $n > s_K\bar{r}$. At have megen kapital - fysisk eller human - per capita øger fortsat nationalindkomsten per capita. Mekanismen hvorved højere s_K trækker w^* opad er denne gang lidt subtil: Højere s_K betyder højere nationalindkomst i steady state, fordi nationalformuen (til fast forrentning) vokser, og den højere nationalindkomst genererer mere humankapital per capita, hvilket trækker arbejdets grænseprodukt opad.

Der er en modsat effekt fra s_K og s_H på c^* af samme grund som i den lukkede økonomi. Der er denne gang ikke nogen meningsfuld golden rule (værdier for s_K og s_H, der maksimerer c^*), idet hvis s_K vokser mod $n/\bar{r}$, da vil y^{n*} gå mod uendelig (forudsat $n/\bar{r} < 1$), og det samme vil så c^* (forudsat $1-n/\bar{r}-s_H > 0$). Årsagen er, at Indlandet er forudsat at kunne blive ved med at placere formue til en fast realrente $\bar{r}$, uanset hvor meget formue, der allerede er akkumuleret, dvs. Indlandet er ikke underlagt 'diminishing returns' til formue. Dette skyldes essentielt antagelsen om en *lille* åben økonomi, som naturligvis ikke er rimelig, hvis Indlandet bygger ekstremt meget formue op. I det tilfælde må Indlandet nemlig påvirke den fysiske kapital grænseprodukt *globalt*. Det vil være rigtig flot, hvis en besvarelse på dette punkt afprøver, om større værdier af s_K og s_H *ud fra plausible startværdier* tenderer at øge c^* (hvilket typisk vil være tilfældet).

9. Ud fra (27) og (28) opstilles betingelserne for hhv. $\Delta v_t \equiv v_{t+1} - v_t = 0$ og $\Delta h_t \equiv h_{t+1} - h_t = 0$:

$$s_K q^* h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}} = (n - s_K\bar{r})\, v_t$$
$$s_H\bar{r}v_t = nh_t - s_H q^* h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}},$$

hvor betegnelsen q^* igen er brugt for enkelheds skyld. Man kan (fx) skrive disse ligninger som hhv.:

$$v_t = q^* \frac{s_K}{n - s_K\bar{r}} h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}$$

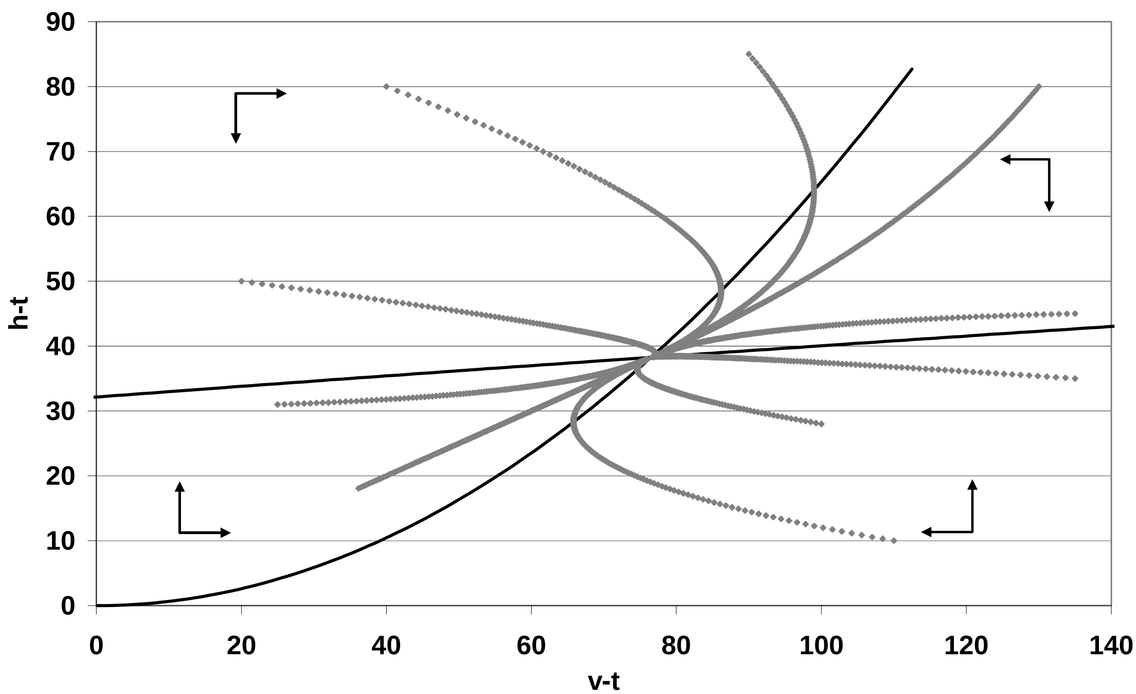
$$v_t = \frac{nh_t - s_H q^* h_t^{\frac{\varphi}{1-\alpha}}}{s_H\bar{r}}$$

I et $v_t - h_t$ diagram (se nedenfor) ligger den første af disse med de givne parameterværdier som en parabel gennem $(0,0)$. Den anden skærer h_t-aksen for $h_t = \left(\frac{s_H q^*}{n}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}$ (findes ved at sætte $v_t = 0$) og er herfra voksende.

Kurverne for $\Delta v_t = 0$ og $\Delta h_t = 0$ ligger for taleksemplet som anført i figuren nedenfor konstrueret i Excel regneark. Ud fra formlerne (30) og (31) findes nemt at:

$$v^* = 76,52 \quad \text{og} \quad h^* = 38,26,$$

hvilket ses at passe med kurvernes skæringspunkt.



Pilene konstrueres ved at man (omhyggeligt!) ud fra hhv. (27) og (28) analyserer, hvordan en ændring i enten v_t eller h_t påvirker fortegnet på Δv_t eller Δh_t ud fra en startsituation hvor $\Delta v_t = 0$ eller $\Delta h_t = 0$. Betragt fx (27). Ud fra en kombination af v_t, h_t, hvor $v_{t+1} - v_t = 0$, vil en højere værdi for h_t givet v_t klart indebære at højresiden bliver positiv, dvs. $\Delta v_t > 0$. Derfor skal det over kurven for $\Delta v_t = 0$ gælde, at v_t er voksende som angivet af pilene, og så fremdeles.

Simulerede spor skal ligge i stil med (men ikke eksakt som) de spor, der er angivet i figuren ovenfor. Der skal naturligvis foreligge dokumentation for figuren, dvs. de til konstruktioon af figuren relevante regnearksøvelser e.l. skal forekomme som bilag. Se den bilagte 'Tabel til spørgsmål 9' for én af simulationerne et vist antal perioder frem.

De beregnede spor tyder på (men verificerer ikke generelt) konvergens mod steady state.

10. Definér x som forholdet mellem steady state-indkomst per capita i åben økonomi y^{n*} og lukket økonomi y_c^* (fodtegn c bruges igen som betegnelse for 'lukket'). Fra (35-1) med indsættesle af (32) samt fra (12) findes:

$$x \equiv \frac{y^{n*}}{y_c^*} = \frac{\frac{n}{n-s_K\bar{r}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n-s_K\bar{r}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{\left(\frac{s_K}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{s_H}{n}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}},$$

som med passende forkortninger osv. giver:

$$x = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\alpha n}{s_K}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{1-\frac{s_K}{n}\bar{r}}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}$$

Fra den lukkede økonomi huskes fra (13):

$$r_c^* = \frac{\alpha n}{s_K},$$

så x kan skrives:

$$x = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{\tilde{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}} \left(\frac{1}{1-\alpha\tilde{r}}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}, \quad \tilde{r} \equiv \frac{\bar{r}}{r_c^*},$$

hvor $\alpha\tilde{r} < 1$ fra $n > s_K\bar{r}$ ($\Leftrightarrow \alpha n/s_K > \alpha\bar{r} \Leftrightarrow \alpha\tilde{r} < 1$). Man viser nu i tre skridt:

1. For $\tilde{r} = 1$ er $x = 1$ (fremgår ved indsættelse).
2. Den afledte

$$\frac{d\ln x}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}\frac{\alpha}{1-\alpha\tilde{r}}$$

er nul for $\tilde{r} = 1$ (fremgår ved indsættelse).

3. Samme afledte er voksende i $\tilde{r}$ så længe $\alpha\tilde{r} < 1$ (fremgår direkte ved inspektion - differentiation ikke nødvendig).

Dermed følger, at x som funktion af $\tilde{r}$ har entydigt minimum for $\tilde{r} = 1$, og minimumsværdien for x er én. Dette betyder netop, at $y^{n*} > y_c^*$ undtagen i tilfældet $\tilde{r} = 1$, svarende til $\bar{r} = r_c^* = \frac{\alpha n}{s_K}$.

Intuitionen er denne: Hvis Indlandet som lukket (på langt sigt) ville danne en realrente, der var større end den intenationale realrente ($\bar{r} < r_c^*$), da ville indlændinge ved en åbning af økonomien kunne drage fordel af at låne til den relativt lave internationale rente og placere i indenlandsk kapital til højere forrentning. I modsat tilfælde ($\bar{r} > r_c^*$) kan indlændinge ved en åbning drage fordel af at omplacere kapital fra Indlandet til det internationale kapitalmarked med en højere forrentning. De beskrevne kapitalbevægelser vil naturligvis udligne afkastgraden mellem indenlandsk placeret kapital og kapital placeret på det internationale kapitalmarked, men de hertil medgående kapitalplaceringer øger altså Indlandets nationalindkomst.

11. Ved at gå tilsvarende frem for reallønningerne fås fra (32) og (13):

$$\begin{aligned}
z \quad \equiv \quad \frac{w^*}{w_c^*} &= \frac{(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\alpha}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n-s_K\bar{r}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}}{(1-\alpha)\left(\frac{s_K}{n}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{s_H}{n}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}} \\
&= (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\frac{\alpha n}{s_K}}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{n}{n-s_K\bar{r}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \\
&= (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{\frac{\alpha n}{s_K}}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{1}{1-\frac{s_K}{\alpha n}\alpha\bar{r}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \\
&= (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{r_c^*}{\bar{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha\bar{r}}{r_c^*}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}} \\
&= (1-\alpha)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{1}{\tilde{r}}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}}\left(\frac{1}{1-\alpha\tilde{r}}\right)^{\frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}},
\end{aligned}$$

og det huskes at $\alpha\tilde{r} < 1$, dvs. $\tilde{r} < 1/\alpha$.

1. For $\tilde{r} = 1$ er $z = 1$ (fremgår ved indsættelse) og for $\tilde{r}$ gående op mod $1/\alpha$ går z mod uendelig (fremgår ved inspektion).

Den afledte beregnes:

$$\frac{d\ln z}{d\tilde{r}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha-\varphi}\frac{1}{\tilde{r}} + \frac{\varphi}{1-\alpha-\varphi}\frac{\alpha}{1-\alpha\tilde{r}},$$

2. Denne afledte er lig med nul netop for $\tilde{r} = \frac{1}{\alpha+\varphi}$ (fremgår ved at sætte den afledte lig med nul og løse for $\tilde{r}$). Der gælder $1 < \frac{1}{\alpha+\varphi} < \frac{1}{\alpha}$.

3. For $0 < \tilde{r} < \frac{1}{\alpha+\varphi}$ er den afledte < 0, mens for $\frac{1}{\alpha+\varphi} < \tilde{r} < \frac{1}{\alpha}$ er den > 0 (fremgår ved inspektion).

Dermed følger, at z som funktion af $\tilde{r}$ har entydigt minimum i $\frac{1}{\alpha+\varphi} > 1$, hvor z antager en værdi, der er mindre end én, mens for $\tilde{r} = 1$ er $z = 1$ og for $\tilde{r}$ gående op mod $1/\alpha$ vokser z mod uendelig.

Dette betyder, at for $\tilde{r} < 1$ svarendetil $\bar{r} < r_c^*$, vil der gælde $w^* > w_c^*$, altså at steady state-reallønnen er større i den åbne økonomi end i den lukkede. Forklaringen er, at når $\bar{r} < r_c^*$ vil en åbning betyde, at kapital strømmer til Indlandet, hvilket øger Indlandets kapitalintensitet og dermed arbejdets grænseprodukt, en effekt ligesom i pensums model uden humankapital. Hertil kommer, at den øgede nationalindkomst per capita (spørgsmål 10) giver mere humankapital per capita i Indlandet (fordi en bestemt andel af nationalindkomsten investeres i humankapital), hvilket trækker arbejdskraftens grænseprodukt yderligere opad.

Det følger også, at for $\tilde{r} > 1$ svarende til $\bar{r} > r_c^*$, vil der over et vist interval gælde $w^* < w_c^*$, men for $\tilde{r}$ tilstrækkelig tæt op mod $1/\alpha$, må $w^* > w_c^*$. (Den eksakte skæringsværdi for $\tilde{r}$ er ikke afgørende her). Der er her to modsat rettede kræfter i spil. Kapitaludstrømningen giver mindre indenlandsk kapitalintensitet, hvilket i sig selv trækker arbejdets grænseprodukt nedad. Men det gælder stadig, at den øgede nationalindkomst per capita (spørgsmål 10) giver mere humankapital per capita i Indlandet, hvilket trækker arbejdskraftens grænseprodukt opad. Hvis $\bar{r}$ er stor nok i forhold til r_c^*, kan fordelen mht. y^{n*} ved at investere kapital internationalt blive så stor, at det giver så meget ekstra humankapital, at arbejdets grænseprodukt og dermed reallønnen stiger, selv om kapitalflugten tenderer at sende samme grænseprodukt nedad.

12. Ved at bruge de relevante steady state-formler *for den lukkede økonomi* findes for verdensøkonomien ved indsættelse af de antagne parameterværdier:

$$\bar{k}^* \cong 2314,8$$

$$\bar{h}^* \cong 1157,4$$

$$\bar{y}^* \cong 138,9$$

$$\bar{c}^* \cong 97,2$$

$$\bar{r}^* \cong 0.02, \quad \bar{w}^* \cong 92,6$$

For Indlandet som lukket findes ved igen at bruge de relevante steady state-formler *for den lukkede økonomi* og indsætte antagne parameterværdier:

$$k_c^* \cong 36,2$$

$$h_c^* \cong 18,1$$

$$y_c^* \cong 8,7$$

$$c_c^* \cong 7,4$$

$$r_c^* \cong 0,08, \quad w_c^* \cong 5,8$$

Hvor fattig den lille nationale økonomi er i forhold til verden før åbning kan måles ved fx

$$\frac{y_c^*}{\bar{y}^*} = \frac{w_c^*}{\bar{w}^*} \cong 0,06, \quad \frac{c_c^*}{\bar{c}^*} \cong 0,08,$$

dvs. målt på gennemsnitsindkomst og -løn betyder forskellene i investerings- og befolkningsvækstrater, at indlandet ligger på (kun) 6% af verden. Målt på forbrug er det ca. 8%.

Når den nationale økonomi åbner sig bruges de relevante steady state-formler *for den åbne økonomi* med $\bar{r} = \bar{r}^* = 0,02$ og de i øvrigt antagne parameterværdier. Dette giver:

$$w^* \cong 16,8$$

$$v^* \cong 76,5$$

$$h^* \cong 35,4$$

$$k^* \cong 420,9$$

$$y^* \cong 25,3$$

$$y^{n*} \cong 18,4$$

$$c^* \cong 15,6$$

$$f^* \cong -344,4$$

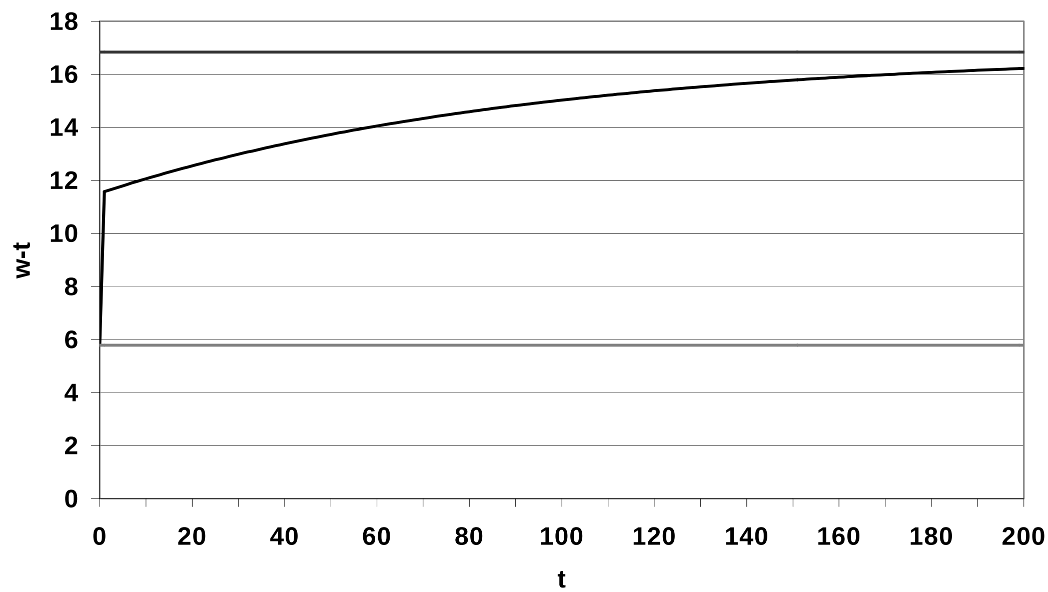
$$\bar{r}f^* \cong -6,9$$

På langt sigt er perspektivet for den lille, relativt fattige økonomi ved en åbning af kapitalposterne godt en fordobling af gennemsnitsindkomst og -forbrug og ca. en tredobling af lønningerne i landet. Dette er ganske betydelige forøgelser.

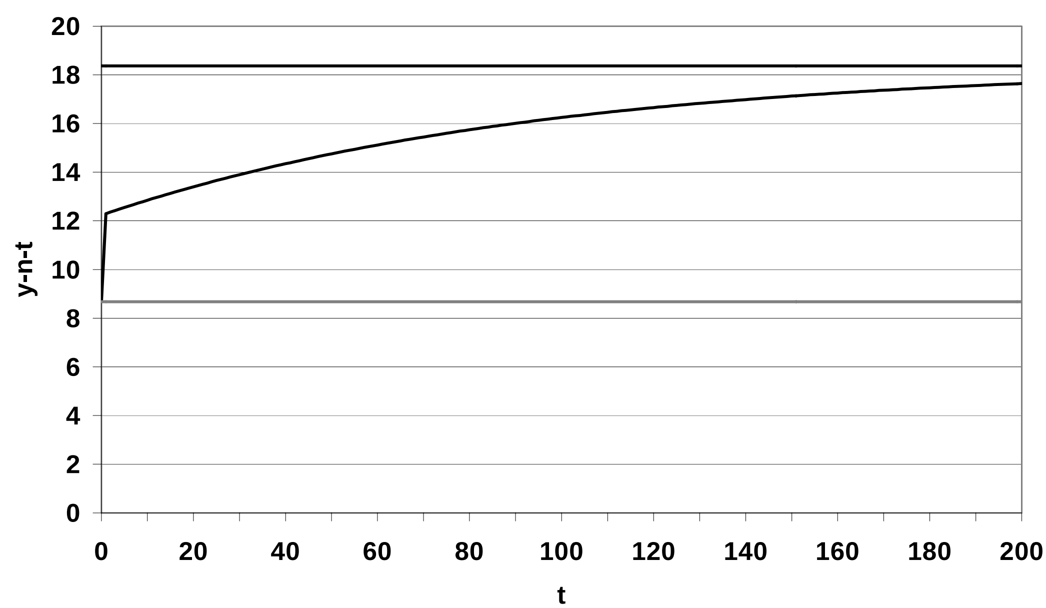
Resultaterne fremkommer ved en massiv kapitalindstrømning, forårsaget af den høje realrente, Indlandet ville frembringe som lukket. Dette betyder, at Indlandet i steady state får en stor udlandsgæld (netto), som det må betale renter på, hvorfor en del af den indenlandsk skabte indkomst går til Verden som overførsler. Ikke desto mindre bliver såvel indkomst som forbrug per capita, og i særlig grad reallønningerne, højere på langt sigt som følge af en åbning (i følge vores model).

13. Relevante simulationer skal udføres og dokumenteres. Tallene skal se ud som angivet i bilagte 'Tabel til spørgsmål 13' (for et begrænset antal perioder frem). Et par grafiske illustrationer kan være som nedenstående, der illustrerer udviklingen i hhv. realløn og nationalindkomst per capita.

Realløn



Nationalindkomst per cap



Det er markant, at der allerede i første periode efter åbningen sker en meget kraftig kapitalindstrømning, så f_t i periode 1 antager en stor negativ værdi, og k_t, y_t, og w_t springer kraftigt opad i periode 1 som følge af kapitalindstrømningen. Også y_t^n og c_t springer markant opad allerede i periode 1, men ikke så kraftigt som k_t, y_t, og w_t, idet der lige fra starten skal betales renter på den store og pludseligt opståede udlandsgæld. Derimod ændres v_t og h_t ikke i periode 1 overhovedet, da ændringer heri kun kan komme fra ændret investering ud af indkomst i fortiden. De beskrevne bevægelser er alle resultat af, at kapital øjeblikkeligt søger til Indlandet som følge af den meget betydelige initiale renteforskel mellem Indland og Verden.

Det er endvidere markant, at efter periode 1 udvikler alle størrelser sig ganske langsomt og gradvist, da alle bevægelser efter period 1 forårsages af almindelig kapitalakkumulation, dvs. af at øget nationalindkomst giver øget akkumulation af formue og humankapital, og Indlandets investeringskvoter er ret beskedne.

Det er naturligvis i et udviklingsperspektiv interessant for Indlandet, at en relativt stor del af den langsigtede gevinst ved et åbne sig kommer allerede fra starten, fx forekommer godt halvdelen af den samlede, langsigtede reallønsstigning allerede i periode 1 (se figur), mens det for nationalindkomst per capita er noget under halvdelen, men stadig et pænt hop opad fra første periode. Dette skyldes naturligvis i høj grad den ret ideale modelforudsætning, at der øjeblikkeligt etableres fuldstændig fri bevægelighed for kapital og dermed sker en øjeblikkelig udligning af kapitalafkastgraderne mellem Indland og Verden, en forudsætning, som det kan være svært at etablere i virkelighedens verden.

Ikke desto mindre er tendensen i resultaterne fra spørgsmål 12 og 13 klar og peger på betydelige og initialt hurtigt forekommende udviklingsmæssige gevinster for fattige økonomier ved at åbne sig for omverdenen.

14. Som nævnt i opgavetelsten har mange relativt fattige lande haft i forhold til ovenstående analyse skuffende erfaringer med at tillade fri bevægelighed for kapital. Indbygning af *landerisiko* i modellen, så forrentningskravet for kapitalplacering i Indlandet ikke er den internationale realrente $\bar{r}$, men den internationale realrente med et risikotilæg ε resulterende i et forrentningskrav på $\bar{r}+\varepsilon$, kan forklare, hvorfor kapital ikke, eller kun i mindre grad, søger til Indlandet ved en åbning. I taleksemplet, hvor $\bar{r} = 0,02$ og $r_c^* = 0,08$, vil et landerisiko-tillæg på $\varepsilon = 0,06$ indebære, at kapital hverken strømmer ind eller ud af Indlandet som følge af en åbning, og en endnu større landerisiko vil indebære, at kapital strømmer ud.

Udviklingsperspektivet ovenfor lå netop i, at kapital skulle strømme *til* Indlandet

- ikke mindst i kraft af den gunstige og hurtigt kommende effekt, dette havde på Indlandet reallønninger. Denne direkte gunstige effekt udebliver naturligvis, hvis kapitalindstrømningen ikke forekommer.

Alligevel kan det ikke entydigt konkluderes, at en åbning vil være skadelig (ikke til fordel) for Indlandet, hvis landerisiko indebærer, at kapital strømmer *fra* Indlandet (med de betragtede parameterværdier i øvrigt). Når der tages hensyn til risikoen, foretrækker de indenlandske investorer jo at placere kapital i udlandet (indtil udligning af risikokorrigerede afkastgrader), og hvis deres risikovurdering ellers er rigtig, vil det faktisk gavne Indlandets mht. nationalindkomst per capita og derfor muligvis også på langt sigt mht. reallønninger, at indenlandske investorer gives mulighed for at investere i udlandet.